Université de Picardie Jules Verne — Année 2007-2008

Master 1 : Distributions

Devoir 2 à rendre le mercredi .

Exercice 1 : Support compact implique ordre fini

Soit T une distribution dont le support est compact.

a) Soit ψ une fonction plateau pour le support de T. Montrer que pour tout $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, on a :

$$< T, \phi >=< T, \psi\phi > .$$

b) Montrer que le support de $\psi\phi$ est inclus dans un compact qui ne dépend pas du support de ϕ.

c) En déduire que T est d'ordre fini.

Exercice 3 : Condition suffisante d'annulation

Soit T une distribution telle que $\mathrm{supp}(T) \subset \{0\}$.

a) Montrer que T est une distribution d'ordre fini. On note k son ordre.

b) Soit ψ une fonction plateau pour $\{0\}$ telle que $\mathrm{supp}(\psi) \subset [-1, 1]$. Ecrire la propriété que vérifie une distribution d'ordre k et l'appliquer à la fonction test $\phi\psi_\epsilon$ où $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ et $\psi_\epsilon(x) = \psi(\frac{x}{\epsilon})$.

c) On suppose que ϕ vérifie $\phi(x) = |x|^{k+1} + \mathcal{O}(|x|^{k+2})$, montrer que $< T, \phi >= 0$. On appliquera la formule de Leibniz dans le résultat trouvé à la question précédente.

Exercice 4 : Distribution à support ponctuel

Soit T une distribution telle que $\mathrm{supp}(T) \subset \{0\}$.

a) Soit $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Développer ϕ par la formule de Taylor avec reste intégral.

b) Utiliser le résultat de l'Exercice 3. pour montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ et $(c_0, \cdots, c_k) \in \mathbb{R}^{k+1}$ tels que

$$< T, \phi >= \sum_{j=0}^{k} c_j (\partial^j \phi)(0).$$

Indice : on pourra (encore une fois) multiplier ϕ par une fonction plateau pour $\{0\}$.

Exercice 5 : Prolongements homogènes de degré -1 de $1/x$ sur $\mathbb{R}$

a) Montrer que $Vp\frac{1}{x}$ est une distribution homogène de degré -1.

b) Soit T une autre distribution homogène de degré -1 qui prolonge $1/x$ sur $\mathbb{R}$. Que peut on dire du support de $T - Vp\frac{1}{x}$?

c) Trouver tous les prolongements homogènes de degré -1 de $1/x$ sur $\mathbb{R}$.