Université de Picardie Jules Verne — Année 2007-2008
Master 1 : Distributions
Devoir 1 à rendre le mercredi 10 octobre 2007.

Exercice 1 : Parties Finies

Définir les parties finies de $1/x^k$ pour k entier supérieur à 3.

Exercice 2 : Support compact implique ordre fini

Soit T une distribution dont le support est compact.

a) Soit ψ une fonction plateau pour le support de T. Montrer que pour tout $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, on a :

$$< T, \phi >=< T, \psi\phi > .$$

b) Que dire du support de $\psi\phi$?

c) Montrer que T est d'ordre fini.

Exercice 3 : Condition suffisante d'annulation

Soit T une distribution telle que $\mathrm{supp}(T) \subset \{0\}$. On note k son ordre. Montrer que si $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ est telle que $\phi(x) = \mathcal{O}(|x|^{k+1})$ en 0, alors $< T, \phi >= 0$.

Indices : comme à l'exercice précédent on introduira ψ, une fonction plateau pour $\{0\}$. On considérera alors la fonction $\psi_\epsilon(x) = \psi(x/\epsilon)$. On aura à appliquer soigneusement la formule de Leibniz.

Exercice 4 : Distribution à support ponctuel

Soit T une distribution telle que $\mathrm{supp}(T) \subset \{0\}$. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ et $(c_0, \cdots, c_k) \in \mathbb{R}^{k+1}$ tels que

$$< T, \phi >= \sum_{j=0}^{k} c_j (\partial^j \phi)(0).$$

Indice : on développera ϕ par la formule de Taylor avec reste intégral et on utilisera le résultat de l'Exercice 3.

Exercice 5 : Prolongements homogènes de degré -1 de $1/x$ sur $\mathbb{R}$

a) Montrer que $Vp\frac{1}{x}$ est une distribution homogène de degré -1.

b) Soit T une autre distribution homogène de degré -1 qui prolonge $1/x$ sur $\mathbb{R}$. Que peut on dire du support de $T - Vp\frac{1}{x}$?

c) Trouver tous les prolongements homogènes de degré -1 de $1/x$ sur $\mathbb{R}$.