Le but de ce TP est de programmer différentes méthodes de différences finies pour approcher la solution de :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ sur } \mathbb{R} \times]0, T[, \\ u(\cdot, 0) = u_0 \text{ sur } \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1)$$

avec u_0 à support compact et $c > 0$.

On s'intéresse aux schémas suivants :

- Schéma explicite décentré.
- Schéma explicite centré.
- Schéma de Lax-Friedrichs :

$$\frac{u_j^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)}{dt} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2dx} = 0.$$

- Schéma de Lax-Wendroff :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{dt} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2dx} - c^2 \frac{dt}{2} \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{dx^2} = 0.$$

- Schéma Leap-Frog (saute-mouton) :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2dt} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2dx} = 0.$$

- Schéma implicite centré.
- Schéma de Crank Nicolson :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{dt} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{4dx} + c \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{4dx} = 0.$$

A faire : Programmer chacun de ces schémas pour l'équation de transport posée sur $[0, L]$ avec les conditions périodiques :

$$u(0, t) = u(L, t) \quad \forall t > 0,$$

i.e. $x_0 = x_N$ et $x_{N+1} = x_1$ si $(x_i)_{1 \leq i \leq N}$ désigne le maillage.

Pour chacun de ces schémas :

- Vérifier l'ordre en prenant comme condition initiale :

$$u_0(x) = e^{-100(x-0.5)^2}.$$

- Observer les propriétés de dispersion et diffusion de chacun des schémas. On pourra également considérer comme condition initiale la marche : $u_0(x) = \chi_{[L/4, 3L/4]}(x)$.