On s'intéresse à l'équation :

$$\begin{cases} -u'' = f \text{ sur }]0,1[, \\ u(0) = g_0, \\ u(1) = g_1, \end{cases} \tag{1}$$

avec $f \in C^\infty(0,1)$ et g_0 et g_1 deux réels.

On cherche à écrire des schémas aux différences finies d'ordre élevé pour cette équation. On discrétise uniformément l'intervalle $]0,1[$ en $N+2$ points : $x_0, \ldots, x_{N+1}$. Et on note $h = x_{i+1} - x_i$ le pas de maillage.

Exercice 1 : Schéma d'ordre 4

a) En un point intérieur x_i, $2 \leq i \leq N-1$, écrire un schéma aux différences finies à 5 points, centré, symétrique et d'ordre 4 pour discrétiser (1).

b) Ecrire le schéma centré "classique" en x_1 et x_N.

c) Ecrire le schéma précédent sous forme matricielle.

d) Expliquer comment écrire un schéma d'ordre supérieur.

Exercice 2 : Schéma compact

On considère à présent des schémas dits "compacts". Pour simplifier on prend ici $g_0 = g_1 = 0$. On note u_i l'approximation de $u(x_i)$ et w_i l'approximation de $u''(x_i)$. On considère le schéma suivant :

$$\alpha(\mathrm{w}_{i+1} + \mathrm{w}_{i-1}) + \mathrm{w}_i = a\frac{1}{h^2}(\mathrm{u}_{i+1} + \mathrm{u}_{i-1} - 2\mathrm{u}_i),$$

avec α et a des réels à choisir.

a) Choisir α et a qui permettent d'avoir un schéma d'ordre 4.

b) Proposer deux schémas compacts d'ordre 6.