Exercice 1 : Schémas éléments finis

Soit $f \in L^2(0,1)$, λ et γ des constantes positives. Ecrire pour chacun des problèmes suivants un schéma éléments finis P^1 :

- Problème de Dirichlet homogène :

$$\begin{cases} -u' + \lambda u' + \gamma u = f \text{ dans }]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

- Problème de Neuman non homogène :

$$\begin{cases} -u' + \lambda u' + \gamma u = f \text{ dans }]0,1[, \\ u'(0) = \phi_0, \\ u'(1) = \phi_1. \end{cases} \tag{2}$$

Exercice 2 : Schémas éléments finis

On considère le problème du Laplacien avec des conditions de Neuman non homogènes :

$$\begin{cases} -u'' = f \text{ dans }]0,1[\\ u'(0) = \alpha, \\ u'(1) = \beta. \end{cases} \tag{3}$$

a) Montrer que la matrice du système linéaire issu de la méthode des éléments finis P^1 est singulière.

b) Montrer que l'on peut néanmoins résoudre le système linéaires sous la condition :

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \alpha - \beta.$$

Exercice 3 : Estimation d'erreur pour éléments finis P^1

Retrouver les estimations d'erreur du schéma éléments finis P^1 appliqué au problème du Laplacien avec conditions de Dirichlet homogènes.

Exercice 4 : Eléments finis P^2

a) Ecrire un schéma éléments finis P^2 pour le problème du Laplacien avec conditions de Dirichlet homogènes.

b) Donner des estimations d'erreur pour ce schéma.