Le but de ce TD est de programmer et d'analyser différentes méthodes de différences finies pour approcher la solution de :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + c\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ sur } \mathbb{R}\times]0,T[, \\ u(\cdot,0) = u_0 \text{ sur } \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1}$$

avec u_0 à support compact.

On ne considérera que le cas $c > 0$.

On étudiera les schémas suivants :

a) Schéma explicite décentré.

b) Schéma de Lax-Friedrichs :

$$\frac{u_j^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)}{dt} + c\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2dx} = 0.$$

c) Schéma de Lax-Wendroff :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{dt} + c\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2dx} - c^2\frac{dt}{2}\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{dx^2} = 0.$$

d) Schéma Leap-Frog (saute-mouton) :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2dt} + c\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2dx} = 0.$$

e) Schéma implicite centré.

f) Schéma de Crank Nicolson :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{dt} + c\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{4dx} + c\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{4dx} = 0.$$

Exercice 1 : Etude de la solution continue

a) Soit $t \to X(t)$ la courbe, dite caractéristique, définie par :

$$\frac{dX}{dt} = c.$$

Calculer la dérivée de $t \to u(X(t),t)$. Qu'en déduit-on ?

b) Donner la solution exacte de (1) et faire un dessin qui représente une solution initiale de type gaussienne et la solution au temps t correspondante.

c) Même question quand l'intervalle d'espace est $]0, L[$ et que l'on ajoute la condition $u(0, t) = g(t)$.

d) Revenons sur $\mathbb{R}$. Chercher une solution sous la forme d'une onde plane : $u(x, t) = e^{i(kx+\omega t)}$ (i.e. chercher la relation de dispersion $\omega = \omega(k)$).

e) Même question pour l'équation :

$$u_t + cu_x - au_{xx} + bu_{xxx} = 0.$$

Expliquer l'influence du a et du b sur la solution.

Exercice 2 : Etude théorique des schémas numériques

a) Donner les propriétés de consistance, stabilité et convergence des schémas **a)-f)**.

b) Calculer l'équation équivalente des schémas **a)-f)**.

c) Préciser pour chaque schéma s'il est plutôt diffusif ou dispersif.

Exercice 3 : Programmation

a) Programmer chacun de ces schémas pour l'équation de transport posée sur $[0, L]$ avec les conditions périodiques :

$$u(0, t) = u(L, t) \ \forall t > 0.$$

b) Vérifier l'ordre de chacun de ces schémas, en prenant comme condition initiale :

$$u_0(x) = e^{-100(x-0.5)^2}.$$

c) Observer les propriétés de dispersion et diffusion de chacun des schémas. On pourra également considérer comme condition initiale la marche : $u_0(x) = \chi_{[L/4,3L/4]}(x)$.