On s'intéresse à l'équation :

$$\begin{cases} -u'' = f \text{ sur } (0, 1), \\ u(0) = g_0, \\ u(1) = g_1, \end{cases} \quad (1)$$

avec $f \in C^\infty(0, 1)$.

On cherche à écrire des schémas aux différences finies d'ordre élevé pour cette équation. On discrétise uniformément l'intervalle $(0, 1)$ en $N + 2$ points : $x_0, \dots, x_{N+1}$. Et on note $h = x(2) - x(1)$ la pas de maillage.

Exercice 1 : Schéma d'ordre 4

- En un point intérieur x_i , $2 \leq i \leq N - 1$, écrire un schéma aux différences finies à 5 points, centré, symétrique et d'ordre 4 pour discrétiser (1).
- Ecrire le schéma centré "classique" en x_1 et x_N .
- Ecrire le schéma précédent sous forme matricielle.
- Expliquer comment écrire un schéma d'ordre supérieur.

Exercice 2 : Schéma compact

On considère à présent des schémas dits "compacts". Pour simplifier on prend ici $g_0 = g_1 = 0$. On note u_i l'approximation de $u(x_i)$ et u_i'' l'approximation de $u''(x_i)$. On considère le schéma suivant :

$$\alpha(u_{i+1}'' + u_{i-1}'') + u_i'' = a \frac{1}{h^2} (u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i),$$

avec α et a des réels à choisir.

- Choisir α et a qui permettent d'avoir un schéma d'ordre 4.
- Ecrire le système matriciel correspondant. Comme pour le schéma aux différences finies classique exprimer la relation qui existe entre les u_i et les $f_i = f(x_i)$.
- Proposer au moins deux schémas compacts d'ordre 6.