Exercice 1 : Equation de transport

On considère l'équation :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + c\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ sur } \mathbb{R}\times]0,T[, \\ u(\cdot,0) = u_0 \text{ sur } \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1}$$

avec u_0 à support compact et $c > 0$.

a) Soit $t \to X(t)$ la courbe, dite caractéristique, définie par :

$$\begin{cases} X'(t) = c, \\ X(0) = x_0. \end{cases}$$

Choisir plusieurs valeurs de x_0 et tracer les courbes caractéristiques correspondantes.

b) Calculer la dérivée de $t \to u(X(t), t)$. Qu'en déduit-on ?

c) Donner la solution exacte de (1) et faire un dessin qui représente une solution initiale de type gaussienne et la solution au temps t correspondante.

d) Même question quand l'intervalle d'espace est $]0, L[$ et que l'on ajoute la condition $u(0,t) = g(t)$ avec g une fonction continue.

e) Revenons sur $\mathbb{R}$. Chercher une solution sous la forme d'une onde plane : $u(x,t) = e^{i(kx+\omega t)}$ (i.e. chercher la relation de dispersion $\omega = \omega(k)$).

f) Même question pour l'équation :

$$v_t + cv_x - av_{xx} + bv_{xxx} = 0, \;\; a > 0.$$

Comparer v avec la solution de l'équation de transport selon les valeurs de a et b.

Exercice 2 : Equations de Saint Venant 1D

On considère l'équation suivante qui modélise l'évolution de la hauteur d'eau dans un bassin d'eau peu profonde. Les inconnues u et h représentent respectivement la vitesse et la hauteur d'eau. H et c sont des constantes positives.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + c^2\dfrac{\partial h}{\partial x} = 0 \text{ dans }]0,L[\times]0,T[, \\ \dfrac{\partial h}{\partial t} + H\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ dans }]0,L[\times]0,T[, \\ u(\cdot,0) = u_0 \text{ sur }]0,L[, \\ h(\cdot,0) = h_0 \text{ sur }]0,L[\end{cases}$$

a) Ecrire ce système d'équations sous forme d'un système matriciel : $\frac{\partial W}{\partial t} + A\frac{\partial W}{\partial x} = 0$.

b) En diagonalisant la matrice, résoudre l'équation.

Exercice 3 : Etude théorique de quelques schémas

On considère les schémas suivants pour approcher la solution de (1) :

— Schéma explicite décentré :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{dt} + c\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{dx} = 0$$

— Schéma explicite centré :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{dt} + c\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2dx} = 0$$

— Schéma de Lax-Friedrichs :

$$\frac{u_j^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)}{dt} + c\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2dx} = 0.$$

— Schéma de Lax-Wendroff :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{dt} + c\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2dx} - c^2\frac{dt}{2}\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{dx^2} = 0.$$

— Schéma Leap-Frog (saute-mouton) :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2dt} + c\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2dx} = 0.$$

— Schéma implicite centré.

— Schéma de Crank Nicolson :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{dt} + c\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{4dx} + c\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{4dx} = 0.$$

a) Donner les propriétés de consistance, stabilité et convergence des schémas précédents.

b) Calculer l'équation équivalente des schémas précédents.

c) Préciser pour chaque schéma s'il est plutôt diffusif ou dispersif.