

Dans un premier temps, on s'intéresse au problème 1D :

$$\begin{cases} -u'' = f \text{ dans }]a, b[, \\ u(a) = \alpha, \\ u(b) = \beta, \end{cases} \quad (1)$$

où f est une fonction continue.

Exercice 1 : Résolution analytique

- a) Résoudre l'équation (1).
- b) Considérer les cas particuliers :

$$\begin{aligned} a = 0, b = \pi, \alpha = 0, \beta = 0, f(x) &= \sin(x), \\ a = 0, b = 1, \alpha = 0, \beta = 0, f(x) &= (x+1)(x-2), \\ a = 0, b = 1, \alpha = 1, \beta = 5, f(x) &= 2. \end{aligned}$$

Exercice 2 : Valeurs propres du problème continu

Chercher les couples de nombre et solution régulière (λ, u) tels que :

$$\begin{cases} -u'' = \lambda u \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Exercice 3 : Valeurs propres du problème discret

On considère la matrice d'ordre N :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

où α et β sont deux réels non nuls.

Le but de l'exercice est de trouver les éléments propres de A .

- a) Soit $X \in \mathbb{R}^N$ tel que $AX = \lambda X$. Ecrire la relation de récurrence que vérifient les composantes X_i de X . On posera pour simplifier $X_0 = X_{N+1} = 0$.
- b) Ecrire le polynôme caractéristique de cette relation de récurrence. Montrer que le discriminant ne peut être ni positif ni nul et que les racines sont de module 1.
- c) Résoudre cette relation de récurrence.
- d) Trouver à présent les valeurs propres de A .
- e) Application : donner le comportement de $K_2(A)$, le conditionnement de la matrice du Laplacien discret 1D, quand le pas de maillage tend vers 0.

On s'intéresse à présent au problème 2D :

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2)$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4 : Résolution de l'équation sur un disque

a) Soit $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 , et ϕ définie par :

$$\left| \begin{array}{l} \phi : \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) \mapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta)). \end{array} \right.$$

On considère $\tilde{F} : \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\tilde{F}(r, \theta) = F \circ \phi(r, \theta)$.

- i) Calculer $\frac{\partial \tilde{F}}{\partial r}(r, \theta)$ et $\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \theta}(r, \theta)$ en fonction de $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$.
- ii) En déduire l'expression de $\frac{\partial F}{\partial x}$ et $\frac{\partial F}{\partial y}$ en fonction de $\frac{\partial \tilde{F}}{\partial r}$ et $\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \theta}$.
- iii) Calculer le Laplacien de F en coordonnées polaires.
- b) Ici Ω est le disque de centre O et de rayon 1. Ecrire l'équation (2) en coordonnées polaires. Chercher la solution de $-\Delta u = 0$ sous la forme d'une fonction à variables séparées : $u(x, y) = \tilde{u}(r, \theta) = \varphi(r)\psi(\theta)$ avec ψ une fonction 2π -périodique.
- c) Supposer que $g(x, y) = \tilde{g}(\theta)$ est une fonction $C^1([0, 2\pi])$ avec $g(0) = g(2\pi)$ et résoudre l'équation (2).
- d) Montrer que la solution s'écrit :

$$\tilde{u}(r, \theta) = \frac{1 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g(\sigma)}{1 - 2r \cos(\theta - \sigma) + r^2} d\sigma.$$