On s'intéresse ici à la résolution du système $AX = b$ où A est une matrice $n \times n$ inversible et b un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 1 : Elimination de Gauss

a) Ecrire sur le papier l'algorithme de l'élimination de Gauss sans pivot.

b) Ecrire une procédure Matlab *GaussElim* qui prend en argument d'entrée une matrice A et un vecteur b et qui calcule la solution de $AX = b$ par la méthode d'élimination de Gauss.

c) Tester la procédure sur les données suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 16 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

d) Ecrire une procédure Matlab *GaussElim2* qui met en oeuvre une stratégie de pivot partiel.

Exercice 2 : Mise en évidence des erreurs d'arrondi

a) Soit $n > 0$ un entier donné. Construire une matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ aléatoire et un vecteur $X^{ex} \in \mathbb{R}^n$ aléatoire (on utilisera la fonction *rand*).

b) Calculer $b = AX^{ex}$.

c) Calculer $b^s = \text{single}(A)\text{single}(X^{ex})$.

d) Résoudre le système $\text{single}(A)X^s = b^s$ avec *GaussElim*. Comparer la solutions obtenue avec X^{ex} (on calculera la norme 2 de l'erreur : $\|X - X^{ex}\|_2$).

e) Pour successivement $n = 5, 15, 25, \cdots, 205$ résoudre 20 systèmes linéaires de taille $n \times n$ différents (obtenus de façon aléatoire).

f) Tracer le logarithme de l'erreur : $\log(\|X - X^{ex}\|_2)$ en fonction de la taille du système pour chacune de ces expériences.

g) Recommencer avec *GaussElim2* et conclure.

h) Soit A une matrice antisymétrique et à diagonale nulle.

(a) Montrer que pour toute matrice B les matrices $(Id - B)$ et $(Id + B)$ commutent.

(b) Montrer que $Q = (Id - A)^{-1}(Id + A)$ est une matrice orthogonale.

(c) Montrer que le conditionnement pour la norme 2 d'une matrice orthogonale vaut 1.

(d) Reprendre les tests précédents (Gauss avec et sans pivot) sur une matrice orthogonale.

Exercice 3 : Factorisation de Cholesky

Ici A est une matrice symétrique définie positive.

a) Ecrire une procédure Matlab *Chol* qui prend en argument d'entrée une matrice A et un vecteur b et qui calcule la solution de $AX = b$.

b) Tester la procédure sur les données suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$