

On s'intéresse ici à la résolution du système  $AX = b$  où  $A$  est une matrice  $n \times n$  inversible et  $b$  un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ .

**Exercice 1 : Elimination de Gauss**

- a) Ecrire sur le papier l'algorithme de l'élimination de Gauss sans pivot.
- b) Ecrire une procédure Matlab *GaussElim* qui prend en argument d'entrée une matrice  $A$  et un vecteur  $b$  et qui calcule la solution de  $AX = b$  par la méthode d'élimination de Gauss.
- c) Tester la procédure sur les données suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 16 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- d) Ecrire une procédure Matlab *GaussElim2* qui met en oeuvre une stratégie de pivot partiel.

**Exercice 2 : Mise en évidence des erreurs d'arrondi**

- a) Soit  $n > 0$  un entier donné. Construire une matrice  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  aléatoire et un vecteur  $X^{ex} \in \mathbb{R}^n$  aléatoire (on utilisera la fonction *rand*).
- b) Calculer  $b = AX^{ex}$ .
- c) Calculer  $b^s = \text{single}(A)\text{single}(X^{ex})$ .
- d) Résoudre le système  $\text{single}(A)X^s = b^s$  avec *GaussElim*. Comparer la solutions obtenue avec  $X^{ex}$  (on calculera la norme 2 de l'erreur :  $\|X - X^{ex}\|_2$ ).
- e) Pour successivement  $n = 5, 15, 25, \dots, 205$  résoudre 20 systèmes linéaires de taille  $n \times n$  différents (obtenus de façon aléatoire).
- f) Tracer le logarithme de l'erreur :  $\log(\|X - X^{ex}\|_2)$  en fonction de la taille du système pour chacune de ces expériences.
- g) Recommencer avec *GaussElim2* et conclure.
- h) Soit  $A$  une matrice antisymétrique et à diagonale nulle.
  - (a) Montrer que pour toute matrice  $B$  les matrices  $(Id - B)$  et  $(Id + B)$  commutent.
  - (b) Montrer que  $Q = (Id - A)^{-1}(Id + A)$  est une matrice orthogonale.
  - (c) Montrer que le conditionnement pour la norme 2 d'une matrice orthogonale vaut 1.
  - (d) Reprendre les tests précédents (Gauss avec et sans pivot) sur une matrice orthogonale.

**Exercice 3 : Factorisation de Cholesky**

Ici  $A$  est une matrice symétrique définie positive.

- a) Ecrire une procédure Matlab *Chol* qui prend en argument d'entrée une matrice  $A$  et un vecteur  $b$  et qui calcule la solution de  $AX = b$ .
- b) Tester la procédure sur les données suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$