Exercice 1 : Jouons avec les normes matricielles

a) Construire A, une matrice aléatoire carrée de taille 10×10, grâce à la commande *rand*.

b) Après avoir rappelé la définition de $\|A\|_1$, $\|A\|_2$, $\|A\|_{inf}$ et $\|A\|_F$, utiliser la commande *norm* pour calculer ces quantités. Vérifier numériquement les propriétés suivantes :

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_i |A_{i,j}|,$$
$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |A_{i,j}|.$$

c) Construire une fonction *spec* qui prend en argument d'entrée une matrice A et qui renvoie $\rho(A)$. On utilisera la fonction *eigs*.

d) Construire une fonction *manorme* qui prend en arguments d'entrée une matrice A, l'entier k et le paramètre p. Cette fonction renvoie $\|A^k\|_p^{1/k}$ pour $p = 1$, 2 ou F.

e) En utilisant les fonctions *spec* et *manorme*, comparer $\rho(A)$ et $\|A^k\|_p^{1/k}$ pour différentes valeurs de k (par exemple, $k = 1, 2, 10, 20, 50, 70, 100, 200, 400$) et ceci pour différentes valeurs de p ($p = 1, 2$ et F). Que remarque-t-on ?

Exercice 2 : Observation des conséquences d'un mauvais conditionnement

On considère ici la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

a) Vérifier que l'inverse de A s'écrit :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 25 & -41 & 10 & -6 \\ -41 & 68 & -17 & 10 \\ 10 & -17 & 5 & -3 \\ -6 & 10 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Ecrire des instructions Matlab qui permettent de résoudre le système $AX = b$ avec le second membre défini par :

$$b = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}.$$

c) On se donne à présent plusieurs seconds membres qui sont des perturbations de b (prendre une perturbation aléatoire). On note b_i ces seconds membres et x_i la solution de $Ax_i = b_i$. Comparer $\|x - x_i\|_2 / \|x\|_2$ et $\|b - b_i\|_2 / \|b\|_2$ pour plusieurs valeurs de i. Vérifier l'inégalité :

$$\frac{\|x - x_i\|_2}{\|x\|_2} \leq \mathrm{cond}(A) \frac{\|b - b_i\|_2}{\|b\|_2}.$$

Exercice 3 : Exemple de matrices mal conditionnées et idée de parade

a) Ecrire une fonction *mahilbert* qui prend en argument d'entrée un entier n et qui renvoie A telle que $A_{i,j} = 1/(i + j - 1)$.

b) Calculer le conditionnement en norme $\| \cdot \|_2$ des 15 premières matrices de Hilbert. Stocker ces nombres dans un tableau.

c) Tracer sur un graphique le logarithme de ces conditionnements en fonction de n et observer que ce conditionnement se comporte comme $e^{7n/2}$.

d) Ici $n = 10$. On décompose A sous la forme $A = D - E - F$ où D est la partie diagonale de A, $-E$ est sa partie strictement inférieure et $-F$ sa partie strictement supérieure. Soit $M_\omega = D - \omega E$. Trouver $\omega \in \mathbb{R}$ qui minimise $\omega \to \mathrm{cond}(M_\omega^{-1} A)$ (on utilisera la fonction *tril*). Conclure.