

### Exercice 1 : Quelques commandes Matlab

- a) Construire les vecteurs

$$u = (5, 8, 7, 9, 30), \quad v = (2, 2.6, \dots, \underbrace{2 + 0.6i}_{\text{élément } i}, \dots, 17), \quad w = (\underbrace{2, 2, \dots, 2, 2}_{100 \text{ éléments}}).$$

- b) Calculer la norme euclidienne de ces vecteurs.  
c) Soient  $u = (1, 10, 15)$  et  $v = (4, 8, 3)$  deux vecteurs. Ecrire une instruction qui permet de calculer le produit scalaire  $u \cdot v$ . On utilisera `*` et `sum`.  
d) Construire la matrice dont les colonnes sont

$$(1, 2, 3), \quad (7, 8, 9) \text{ et } (4, 5, 6).$$

### Exercice 2 : Orthogonalisation de Gram-Schmidt

- a) Rappeler les différentes étapes de l'orthogonalisation de Gram-Schmidt.  
b) Ecrire une fonction `gram_schmidt` qui prend en argument d'entrée une matrice  $M$  dont les colonnes sont les vecteurs à orthonormaliser. Cette fonction renvoie la matrice  $Q$  dont les colonnes sont les vecteurs orthonormalisés.  
c) Tester la fonction `gram_schmidt` sur les vecteurs :

$$\begin{aligned} u_1 &= (1, 2, 3)^t, \\ u_2 &= (2, 2, 3)^t, \\ u_3 &= (2, 2, 1)^t. \end{aligned}$$

### Exercice 3 : Instabilité numérique de l'orthogonalisation de Gram-Schmidt

- a) Utiliser votre fonction `gram_schmidt` pour orthonormaliser les vecteurs  $(1, 10^{-10}, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 10^{-10}, 0)$ ,  $(1, 0, 0, 10^{-10})$ .  
b) Les vecteurs obtenus sont-ils orthogonaux ? Donner une explication.

### Exercice 4 : Orthogonalisation de Gram-Schmidt modifié

Les questions a), b) et c) se traitent sur le papier.

- a) Soient  $a$  et  $b$  deux vecteurs de même taille. Montrer que

$$\langle a, b \rangle b = bb^t a.$$

- b) Soient  $(v_1, \dots, v_n)$ , une famille de  $n$  vecteurs orthonormés. Montrer que

$$(Id - v_n v_n^t)(Id - v_{n-1} v_{n-1}^t) \cdots (Id - v_1 v_1^t) = Id - v_n v_n^t - v_{n-1} v_{n-1}^t \cdots - v_1 v_1^t.$$

- c) Réécrire le procédé de Gram-Schmidt en utilisant les deux résultats précédents.  
d) Programmer cette nouvelle version du procédé de Gram-Schmidt.  
e) Tester la nouvelle fonction sur l'exemple de l'exercice 3 et conclure.