Exercice 1 : La matrice Google

L'objectif de Google est de classer des pages web pour déterminer les plus significatives par rapport à un sujet donné [1].

Pour classer ces pages, on leur attribue un score (PageRank) qui est lié au nombre de liens qui pointent sur elles (exemple : le site du laboratoire de maths pointe sur le site de l'UPJV, le site de l'UPJV pointe sur celui de tous les laboratoires).

Voici la règle utilisée par S. Brin et L. Page, inventeurs de Google pour établir ces scores :
- On accorde plus d'importance, i.e., un score de PageRank plus élevé, aux pages référencées par des pages qui font elles-mêmes autorité dans le domaine, c'est-à-dire qui ont un PageRank élevé.
- On accorde d'autant moins de crédit à une référence, si elle provient d'une page qui dispose de nombreux liens.

On considère une configuration (minimale) qui relie cinq pages :
- La page 1 pointe sur les pages 2 et 3.
- La page 2 ne pointe sur aucune page.
- La page 3 pointe sur les pages 4 et 5.
- La page 4 pointe sur les pages 1 et 3.
- La page 5 pointe sur les pages $2, 3$ et 4.

Ainsi en appelant s_i le score de la page i, on a $s_1 = s_4/2$.

Ecrire le système linéaire correspondant aux règles utilisées par Google et discuter de la procédure à suivre pour obtenir le classement de ces pages.

Exercice 2 : Méthode de la puissance itérée et de la puissance inverse

On rappelle l'algorithme de la puissance itérée appliqué à une matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$:

Soit $q_0 \in \mathbb{R}^n$ avec $\|q_0\|_2 = 1$
Pour $k = 1 \cdots$ Faire
  $z_k = Aq_{k-1}$
  $q_k = \frac{z_k}{\|z_k\|_2}$
  $\mu_{k-1} =< q_{k-1}, z_k >$
FinPour

a) Premier exemple.

i) Calculer les valeurs et vecteurs propres de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ -9 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Voir l'exposé de M. Rigo, Université de Liège.

ii) Calculer les trois premiers itérés de la méthode de la puissance appliquée à A. On prendra comme premier itéré $q_0 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^t$.

b) Idée de la démonstration dans un cas particulier.

i) Calculer λ_1, λ_2 les valeurs propres et v_1,v_2 les vecteurs propres de

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

ii) Exprimer $q_0 = (1, 0)^t$ en fonction de v_1 et v_2.

iii) Montrer que $q_k = B^k q_0 / \|B^k q_0\|$.

iv) Calculer $B^k q_0$ en fonction des λ_i et v_i. Quelle est la limite de $B^k q_0 / \|B^k q_0\|$?

v) Calculer la limite de μ_k.

c) Méthode de la puissance inverse.

i) A quelle matrice peut-on appliquer la méthode de la puissance pour obtenir la plus petite valeur propre en module d'une matrice ?

ii) Ecrire l'algorithme correspondant.

Exercice 3 : Technique de déflation

Soit $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ une matrice dont le spectre vaut

$$Spe(A) = \{\lambda_n, \lambda_{n-1}, \cdots, \lambda_2, \lambda_1\}.$$

On suppose que l'on connait (λ_j, u_j) un élément propre de A. Le but de cet exercice est de trouver les valeurs/vecteurs propres de $\tilde{A}_j = A - \sigma u_j v^\star$, où σ est un paramètre complexe et $v \in \mathbb{C}^N$ un vecteur tel que $v^\star u_j = 1$.

a) Résultats prélimaires

i) Quelles sont les dimensions de $u_j v^\star$ et $v^\star u_j$?

ii) Montrer que $(w^\star A)^\star = A^\star w$.

iii) On dit que $w \in \mathbb{C}^N$, $w \neq 0$, est vecteur propre à gauche de A si il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que

$$w^\star A = \mu w^\star.$$

Montrer que μ est alors valeur propre de A.

iv) Soit w_i un vecteur propre à gauche de A associé à la valeur propre $\lambda_i \neq \lambda_j$.
– Montrer que w_i et u_j sont orthogonaux.
– Montrer que $(v u_j^\star) w_i = 0$.

b) Calcul des valeurs propres de $\tilde{A}_j$

i) Soit w_i un vecteur propre à gauche de A associé à la valeur propre $\lambda_i \neq \lambda_j$. Calculer $w_i^\star \tilde{A}_j$ et en déduire que λ_i est valeur propre de $\tilde{A}_j$.

ii) Montrer que u_j est vecteur propre de $\tilde{A}_j$. Calculer sa valeur propre associée.

c) Calcul des vecteurs propres de $\tilde{A}_j$

Montrer que $(u_j v^\star)u_i = (v^\star u_i)u_j$ et calculer les autres vecteurs propres de $\tilde{A}_j$. On pourra les chercher sous la forme $\tilde{u}_i = u_i - \gamma_i u_j$, $\gamma_i \in \mathbb{C}$.

d) Algorithme

Comment exploite-t-on ce résultat dans le cadre de la recherche numérique de valeurs propres ?

Exercice 4 : Méthode de Jacobi

Soit $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ une matrice carrée symétrique. On considère $\Omega^{p,q}(\theta)$, la matrice identité dont les éléments (p,p), (p,q), (q,p) et (q,q) avec $p < q$ ont été modifiés :

$$\Omega^{p,q}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cos(\theta) & \cdots & \sin(\theta) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -\sin(\theta) & \cdots & \cos(\theta) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Soit $B^{p,q} = (\Omega^{p,q})^t \, A \, \Omega^{p,q}$. Calculer $B_{p,q}$, $B_{p,p}$ et $B_{q,q}$ ainsi que $B_{p,j}$ et $B_{q,j}$ pour j différent de p et q.

b) Montrer que $B_{p,q} = 0$ pour
- θ tel que $\tan(2\theta) = \frac{2A_{p,q}}{A_{q,q}-A_{p,p}}$ si $A_{q,q} - A_{p,p} \neq 0$,
- $\theta = \frac{\pi}{4}$ sinon.

c) La méthode de Jacobi consiste à appliquer systématiquement la procédure précédente afin d'obtenir une matrice diagonale. Appliquez cette méthode de Jacobi pour trouver les valeurs propres de la matrice suivante (on annule toujours le terme non diagonal de plus grand module) :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & \sqrt{2} \\ -4 & 4 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$