**Exercice 1 : Jacobi/Gauss-Seidel sur un cas simple**

Soit $A$ une matrice réelle d'ordre 2 inversible telle que ses éléments sont non nuls. Soit $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^2$. On considère le système $AX = \mathbf{f}$.

**a)** Comment s'interprète géométriquement la solution du problème $AX = \mathbf{f}$ ?

**b)** Ecrire l'itération $k$ des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel pour ce système.

**c)** Calculer les matrices des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel associées à ce système.

**d)** Calculer les rayons spectraux de ces matrices. Les comparer.

**e)** Interpréter géométriquement la condition sur la convergence des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel.

**f)** Montrer que les $X^k$ obtenus par Gauss-Seidel sont alignés.

**g)** Montrer que les $X^{2k}$ obtenus par Jacobi sont alignés. Même question pour $X^{2k+1}$.

**Exercice 2 : Cas des matrices à diagonale strictement dominante**

Soit $A$ une matrice à diagonale strictement dominante d'ordre $N$.

**a)** Montrer que $A$ est inversible.

**b)** Montrer que la méthode de Jacobi est bien définie.

**c)** Soit $J$ la matrice d'itérations de Jacobi. Que vaut $J_{i,j}$ pour $i, j \in \{1, \cdots, N\}$ ?

**d)** Montrer que $\|J\|_\infty < 1$.

**e)** Montrer que pour toute matrice carrée $M$, $\rho(M) \leq \|M\|_\infty$ et en déduire que la méthode de Jacobi appliquée à $A$ converge.

**Exercice 3 : Méthode itérative par bloc**

Soient $A$ et $B$ deux matrices réelles d'ordre $N$ et $a$, $b$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^N$. On considère les deux suites de vecteurs définies par les itérations suivantes :

$$\begin{cases} x_{k+1} = By_k + a \\ y_{k+1} = Ax_k + b \end{cases} \tag{1}$$

**a)** Si la suite $(x_k)_k$ converge, quelle équation satisfait sa limite ? Même question pour $(y_k)_k$.

**b)** Déterminer une condition nécessaire et suffisante de convergence pour ces deux suites de vecteurs.

**c)** Soit $z_k = (x_k, y_k)^t \in \mathbb{R}^{2N}$, écrire (1) sous la forme $z_{k+1} = Cz_k + c$. A quelle méthode correspondent ces itérations ?

**d)** Montrer que $\rho(C)^2 = \rho(AB)$.

**e)** On considère à présent l'itération suivante :

$$\begin{cases} x_{k+1} = By_k + a, \\ y_{k+1} = Ax_{k+1} + b. \end{cases} \tag{2}$$

Ecrire (2) sous la forme $z_{k+1} = Dz_k + d$. A quelle méthode correspondent ces itérations ?

**f)** Montrer que $\rho(D) = \rho(AB)$.

**g)** On pose $e_k = z_k - \overline{z}$ où $\overline{z}$ est la limite de la suite $(x_k, y_k)^t$ définie par (1). Soit $k_0$ le nombre d'itérations qui permet de réduire l'erreur d'un facteur $\epsilon$ :

$$\frac{\|e_{k_0}\|}{\|e_0\|} \leq \epsilon.$$

Minorer $k_0$ par un nombre qui dépend de $\|C\|$ puis montrer que $k_0$ vérifie :

$$k_0 \geq \frac{-\ln \epsilon}{-\ln(\rho(C))}.$$

**h)** Comparer la vitesse de convergence des algorithmes (1) et (2).

**Exercice 4 : Méthode des directions alternées**

Soit $A$ une matrice inversible de taille $N \times N$ et $b$ un vecteur de $\mathbb{R}^N$, on souhaite résoudre l'équation $AX = b$. Pour cela on décompose $A$ sous la forme $A = H+V$ avec $H$ et $V$ symétriques définies positives et pour $p > 0$, on construit la suite $(X_k)_k$ de la façon suivante :

$$\begin{array}{lcl} (H + pId)X^{k+1/2} & = & b + (pId - V)X^k, \\ (V + pId)X^{k+1} & = & b + (pId - H)X^{k+1/2}. \end{array} \tag{3}$$

**a)** Montrer que si la suite $(X^k)_k$ converge, alors elle converge vers la solution de $AX = b$.

**b)** Montrer que (H+pId) et (V+pId) sont inversibles et qu'ainsi l'algorithme (3) est bien défini.

**c)** A quelle condition cette méthode est-elle raisonnable pour résoudre $AX = b$ ?

**d)** On pose $e^k = X - X^k$, l'erreur à l'étape $k$. Trouver la matrice $G$ telle que $e^{k+1} = Ge^k$.

**e)** Montrer que $H$ et $(pId + H)^{-1}$ commutent et que $(pId - H)(pId + H)^{-1}$ est symétrique.

**f)** Montrer que

$$\|(pId - H)(pId + H)^{-1}\|_2 = \max_{1 \leq i \leq N} \left| \frac{p - \lambda_i(H)}{p + \lambda_i(H)} \right| < 1,$$

où $\lambda_i(H)$ est la $i$eme valeur propre de $H$.

**g)** Montrer que $\rho(G) = \rho((pId - H)(pId + H)^{-1}(pId - V)(pId + V)^{-1})$ et en déduire que l'algorithme (3) converge.