Exercice 1 : Jacobi/Gauss-Seidel sur un cas simple

Soit A une matrice réelle d'ordre 2 inversible telle que ses éléments sont non nuls. Soit $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^2$. On considère le système $AX = \mathbf{f}$.

a) Comment s'interprète géométriquement la solution du problème $AX = \mathbf{f}$?

b) Ecrire l'itération k des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel pour ce système.

c) Calculer les matrices des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel associées à ce système.

d) Calculer les rayons spectraux de ces matrices. Les comparer.

e) Interpréter géométriquement la condition sur la convergence des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel.

f) Montrer que les X^k obtenus par Gauss-Seidel sont alignés.

g) Montrer que les X^{2k} obtenus par Jacobi sont alignés. Même question pour X^{2k+1}.

Exercice 2 : Cas des matrices à diagonale strictement dominante

Soit A une matrice à diagonale strictement dominante d'ordre N.

a) Montrer que A est inversible.

b) Montrer que la méthode de Jacobi est bien définie.

c) Soit J la matrice d'itérations de Jacobi. Que vaut $J_{i,j}$ pour $i, j \in \{1, \cdots, N\}$?

d) Montrer que $\|J\|_\infty < 1$.

e) Montrer que pour toute matrice carrée M, $\rho(M) \leq \|M\|_\infty$ et en déduire que la méthode de Jacobi appliquée à A converge.

Exercice 3 : Méthode itérative par bloc

Soient A et B deux matrices réelles d'ordre N et a, b deux vecteurs de $\mathbb{R}^N$. On considère les deux suites de vecteurs définies par les itérations suivantes :

$$\begin{cases} x_{k+1} = By_k + a \\ y_{k+1} = Ax_k + b \end{cases} \tag{1}$$

a) Si la suite $(x_k)_k$ converge, quelle équation satisfait sa limite ? Même question pour $(y_k)_k$.

b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante de convergence pour ces deux suites de vecteurs.

c) Soit $z_k = (x_k, y_k)^t \in \mathbb{R}^{2N}$, écrire (1) sous la forme $z_{k+1} = Cz_k + c$. A quelle méthode correspondent ces itérations ?

d) Montrer que $\rho(C)^2 = \rho(AB)$.

e) On considère à présent l'itération suivante :

$$\begin{cases} x_{k+1} = By_k + a, \\ y_{k+1} = Ax_{k+1} + b. \end{cases} \tag{2}$$

Ecrire (2) sous la forme $z_{k+1} = Dz_k + d$. A quelle méthode correspondent ces itérations ?

f) Montrer que $\rho(D) = \rho(AB)$.

g) On pose $e_k = z_k - \overline{z}$ où $\overline{z}$ est la limite de la suite $(x_k, y_k)^t$ définie par (1). Soit k_0 le nombre d'itérations qui permet de réduire l'erreur d'un facteur ϵ :

$$\frac{\|e_{k_0}\|}{\|e_0\|} \leq \epsilon.$$

Minorer k_0 par un nombre qui dépend de $\|C\|$ puis montrer que k_0 vérifie :

$$k_0 \geq \frac{-\ln \epsilon}{-\ln(\rho(C))}.$$

h) Comparer la vitesse de convergence des algorithmes (1) et (2).

Exercice 4 : Méthode des directions alternées

Soit A une matrice inversible de taille $N \times N$ et b un vecteur de $\mathbb{R}^N$, on souhaite résoudre l'équation $AX = b$. Pour cela on décompose A sous la forme $A = H+V$ avec H et V symétriques définies positives et pour $p > 0$, on construit la suite $(X_k)_k$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} (H + pId)X^{k+1/2} &= b + (pId - V)X^k, \\ (V + pId)X^{k+1} &= b + (pId - H)X^{k+1/2}. \end{aligned} \tag{3}$$

a) Montrer que si la suite $(X^k)_k$ converge, alors elle converge vers la solution de $AX = b$.

b) Montrer que (H+pId) et (V+pId) sont inversibles et qu'ainsi l'algorithme (3) est bien défini.

c) A quelle condition cette méthode est-elle raisonnable pour résoudre $AX = b$?

d) On pose $e^k = X - X^k$, l'erreur à l'étape k. Trouver la matrice G telle que $e^{k+1} = Ge^k$.

e) Montrer que H et $(pId + H)^{-1}$ commutent et que $(pId - H)(pId + H)^{-1}$ est symétrique.

f) Montrer que

$$\|(pId - H)(pId + H)^{-1}\|_2 = \max_{1 \leq i \leq N} \left| \frac{p - \lambda_i(H)}{p + \lambda_i(H)} \right| < 1,$$

où $\lambda_i(H)$ est la $i$eme valeur propre de H.

g) Montrer que $\rho(G) = \rho((pId - H)(pId + H)^{-1}(pId - V)(pId + V)^{-1})$ et en déduire que l'algorithme (3) converge.