Soit A une matrice réelle symétrique de taille $n \times n$. On veut montrer que A est définie positive si et seulement si tous les mineurs de A sont strictement positifs.

Exercice 1 : Condition nécessaire

Soit A une matrice réelle symétrique et définie positive de taille $n \times n$.

Décomposons A comme suit :

$$A = \begin{pmatrix} B & c_1 \\ c_1^t & A_{n,n} \end{pmatrix},$$

avec $B \in \mathbb{R}^{n-1,n-1}$, $c_1 \in \mathbb{R}^{n-1}$.

a) En utilisant le fait que A est symétrique et définie positive, montrer que B est symétrique et définie positive.

b) En diagonalisant A, montrer que $det(A) > 0$.

c) Conclure.

Exercice 2 : Condition suffisante

Soit A une matrice réelle symétrique de taille $n \times n$ dont tous les mineurs sont positifs.

a) Montrer que A se factorise sous la forme LU' (factorisation LU puis sous la forme LDU avec $U_{ii} = 1$ et D diagonale.

b) Montrer que $U = L^t$ et en déduire que A se factorise sous la forme $A = R^t R$, où R est une matrice triangulaire supérieure aux éléments diagonaux strictement positifs.

c) Montrer que A est définie positive.

Exercice 3 : Application

Utiliser (au moins) trois méthodes pour montrer que la matrice suivante est symétrique, définie positive :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 : Condition suffisante : démonstration self-content

Soit B une matrice réelle symétrique, définie positive de taille $n \times n$. On pose

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} B & c \\ c^t & a \end{pmatrix},$$

où a est un réel strictement positif et $c \in \mathbb{R}^n$

a) Montrer que pour tout $w \in \mathbb{R}^n$:

$$det(\tilde{B}) = \begin{vmatrix} B & c - Bw \\ c^t & a - c^t w \end{vmatrix}.$$

b) Montrer que pour $w = B^{-1}c$,

$$det(\tilde{B}) = (a - < w, Bw >)det(B).$$

Que déduit-on de cette égalité si on suppose $det(\tilde{B}) > 0$?

c) En déduire que $(u^t \, \alpha) \begin{pmatrix} B & c \\ c^t & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \alpha \end{pmatrix} \geq < u + \alpha w, B(u + \alpha w) >$ pour tout $u \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et qu'ainsi $\tilde{B}$ est définie positive

d) Conclure.