Université de Picardie Jules Verne — L3 : Analyse Matricielle.
TD 3 : Factorisation LU — Année 2011-2012.

**Exercice 1 : Méthode délimination de Gauss**

Résoudre par la méthode de Gauss le système $AX = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 14 \\ 32 \\ 32 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 2 : Préparation pour la factorisation LU**

Soit $A$ une matrice $3 \times 3$ dont les lignes sont notées $l_1, l_2$ et $l_3$. Soient $a$, $b$ et $c$ trois réels.

**a)** Trouver la matrice $P_1$ telle que $P_1 A$ soit la matrice constituée des lignes $(l_1, al_1 + l_2, bl_1 + l_3)$.

**b)** Trouver la matrice $P_2$ telle que $P_2 A$ soit la matrice constituée des lignes $(l_1, l_2, cl_2 + l_3)$.

**c)** Calculer $P_1^{-1}$, $P_2^{-1}$ puis $(P_2 P_1)^{-1}$

**Exercice 3 : Factorisation LU**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$, $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $b_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix}$.

**a)** Ecrire la factorisation LU de la matrice $A$.

**b)** Utiliser cette factorisation pour trouver $X_1$ et $X_2$ tels que $AX_1 = b_1$ et $AX_2 = b_2$.

**c)** Quel est l'intérêt de l'algorithme de factorisation LU par rapport à l'algorithme de l'élimination de Gauss ?

**Exercice 4 : Nécessité du choix du pivot en arithmétique non exacte**

On travaille ici en arithmétique non exacte et on considèrera toujours être dans le cas le moins favorable. Cela signifie que si $A$ et $B$ $(A > B)$ sont des nombres réels d'ordre de grandeur très différents, alors $A + B = A$.

On considère le système $AX = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} \epsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

**a)** Résoudre le système en arithmétique exacte.

**b)** Résoudre le système en arithmétique non exacte en utilisant $\epsilon$ comme pivot.

**c)** Résoudre le système en arithmétique non exacte en utilisant 1 comme pivot.

**d)** Conclure.

**Exercice 5 : Factorisation de Cholesky**

Soit $A = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 6 & 20 & 6 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

**a)** Rappeler l'algorithme de Cholesky.

**b)** Montrer que $A$ est symétrique définie positive.

**c)** Ecrire la factorisation de Cholesky de la matrice $A$.

**Exercice 6 : Où l'on relâche des hypothèses**

On désigne par $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des matrices $A$ d'ordre $n$ telles que $x^t Ax > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$. On désigne par $\mathcal{L}_1$ l'ensemble des matrices triangulaires inférieures et à diagonale unité.

**a)** Soient $a$, $b$, $c$ et $d$ quatre réels. Ecrire des conditions nécessaires et suffisantes que doivent vérifier $a$ , $b$, $c$ et $d$ pour que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartienne à $\mathcal{P}_2$.

**b)** Montrer que ces conditions impliquent $a > 0$ et $\det(A) > 0$ mais que la réciproque n'est pas vraie.

**c)** Soit $Q$ une matrice inversible d'ordre $n$ et $A \in \mathcal{P}_n$. Montrer que

$$A \in \mathcal{P}_n \Leftrightarrow QAQ^t \in \mathcal{P}_n.$$

**d)** Soit $A \in \mathcal{P}_n$. Montrer que $A_{ii} > 0$ pour $i \in \{1, \cdots, n\}$.

**e)** Soit $A \in \mathcal{P}_n$.

**i)** Appliquer la première étape de la factorisation $LU$ à la matrice $A$.

**ii)** Montrer qu'il existe $L_1 \in \mathcal{L}_1$ telle que $A^{(1)} = L_1 A L_1^t$ avec

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & v^t \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

où $v \in \mathbb{R}^{n-1}$ et $B$ une matrice d'ordre $n - 1$.

**iii)** Montrer que $B \in \mathcal{P}_{n-1}$.

**iv)** En déduire qu'il existe $L \in \mathcal{L}_1$ telle que $LAL^t = U$ avec $U \in \mathcal{P}_n$ triangulaire supérieure.

**v)** Montrer que $A$ se décompose sous la forme $A = MUM^t$ avec $M \in \mathcal{L}_1$ et $U \in \mathcal{P}_n$, triangulaire supérieure.

**vi)** En utilisant l'unicité de la factorisation $LU$, montrer que la factorisation $A = MUM^t$ est unique.

**f)** Lorsque $A$ est symétrique, montrer que l'on retrouve la décomposition de Cholesky.