Exercice 1 : Méthode délimination de Gauss

Résoudre par la méthode de Gauss le système $AX = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 14 \\ 32 \\ 32 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 : Préparation pour la factorisation LU

Soit A une matrice 3×3 dont les lignes sont notées l_1, l_2 et l_3. Soient a, b et c trois réels.

a) Trouver la matrice P_1 telle que $P_1 A$ soit la matrice constituée des lignes $(l_1, al_1 + l_2, bl_1 + l_3)$.

b) Trouver la matrice P_2 telle que $P_2 A$ soit la matrice constituée des lignes $(l_1, l_2, cl_2 + l_3)$.

c) Calculer P_1^{-1}, P_2^{-1} puis $(P_2 P_1)^{-1}$

Exercice 3 : Factorisation LU

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$, $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $b_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix}$.

a) Ecrire la factorisation LU de la matrice A.

b) Utiliser cette factorisation pour trouver X_1 et X_2 tels que $AX_1 = b_1$ et $AX_2 = b_2$.

c) Quel est l'intérêt de l'algorithme de factorisation LU par rapport à l'algorithme de l'élimination de Gauss ?

Exercice 4 : Nécessité du choix du pivot en arithmétique non exacte

On travaille ici en arithmétique non exacte et on considèrera toujours être dans le cas le moins favorable. Cela signifie que si A et B $(A > B)$ sont des nombres réels d'ordre de grandeur très différents, alors $A + B = A$.

On considère le système $AX = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} \epsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Résoudre le système en arithmétique exacte.

b) Résoudre le système en arithmétique non exacte en utilisant ϵ comme pivot.

c) Résoudre le système en arithmétique non exacte en utilisant 1 comme pivot.

d) Conclure.

Exercice 5 : Factorisation de Cholesky

Soit $A = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 6 & 20 & 6 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Rappeler l'algorithme de Cholesky.

b) Montrer que A est symétrique définie positive.

c) Ecrire la factorisation de Cholesky de la matrice A.

Exercice 6 : Où l'on relâche des hypothèses

On désigne par $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des matrices A d'ordre n telles que $x^t A x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$. On désigne par $\mathcal{L}_1$ l'ensemble des matrices triangulaires inférieures et à diagonale unité.

a) Soient a, b, c et d quatre réels. Ecrire des conditions nécessaires et suffisantes que doivent vérifier a , b, c et d pour que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartienne à $\mathcal{P}_2$.

b) Montrer que ces conditions impliquent $a > 0$ et $\det(A) > 0$ mais que la réciproque n'est pas vraie.

c) Soit Q une matrice inversible d'ordre n et $A \in \mathcal{P}_n$. Montrer que

$$A \in \mathcal{P}_n \Leftrightarrow QAQ^t \in \mathcal{P}_n.$$

d) Soit $A \in \mathcal{P}_n$. Montrer que $A_{ii} > 0$ pour $i \in \{1, \cdots, n\}$.

e) Soit $A \in \mathcal{P}_n$.

- **i)** Appliquer la première étape de la factorisation LU à la matrice A.
- **ii)** Montrer qu'il existe $L_1 \in \mathcal{L}_1$ telle que $A^{(1)} = L_1 A L_1^t$ avec

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & v^t \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

  où $v \in \mathbb{R}^{n-1}$ et B une matrice d'ordre $n-1$.
- **iii)** Montrer que $B \in \mathcal{P}_{n-1}$.
- **iv)** En déduire qu'il existe $L \in \mathcal{L}_1$ telle que $LAL^t = U$ avec $U \in \mathcal{P}_n$ triangulaire supérieure.
- **v)** Montrer que A se décompose sous la forme $A = MUM^t$ avec $M \in \mathcal{L}_1$ et $U \in \mathcal{P}_n$, triangulaire supérieure.
- **vi)** En utilisant l'unicité de la factorisation LU, montrer que la factorisation $A = MUM^t$ est unique.

f) Lorsque A est symétrique, montrer que l'on retrouve la décomposition de Cholesky.