Exercice 1 : Produit scalaire

a) Rappeler la définition d'un produit scalaire défini sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E.

b) Enoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

c) On note $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire $(\cdot,\cdot)$. En considérant la quantité $\|x+\lambda y\|$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, puis dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

d) Montrer que $(A, B) \to tr(AB^\star)$ définit un produit scalaire sur $\mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{C})$. Expliciter la norme associée.

Exercice 2 : Résultats utiles

a) Rappeler les produits scalaires usuellement utilisés sur $\mathbb{C}^n$ et $\mathbb{R}^n$.

b) Rappeler l'inégalité de Young et proposer une démonstration dans le cas $p = q = 2$.

c) Utiliser l'inégalité de Young pour redémontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{C}^n$.

d) Montrer l'inégalité suivante, vraie pour tout $\epsilon > 0$:

$$ab \leq \frac{1}{2\epsilon}a^2 + \frac{\epsilon}{2}b^2, \quad \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 3 : Normes vectorielles

a) Montrer que les applications suivantes sont des normes sur $\mathbb{C}^n$:

$$x \to \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad x \to \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2}, \quad x \to \|x\|_\infty = \max_i |x_i|.$$

b) Montrer que ces normes sont équivalentes.

Exercice 4 : Norme matricielle d'une matrice diagonale

Soit $D = \operatorname{diag}(\mu_1, \cdots, \mu_n)$, une matrice $n \times n$ diagonale à coefficients réels.

a) Montrer que $\|Dx\|_1 \leq \max_i |\mu_i| \|x\|_1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

b) Trouver $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|Dx\|_1 = \max_i |\mu_i| \|x\|_1$.

c) Déduire des questions précédentes la valeur de $\|D\|_1$.

d) Montrer de même que $\|D\|_2 = \|D\|_\infty = \max_i |\mu_i|$.

Exercice 5 : Normes matricielles sous multiplicatives

On considère ici des matrices de $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.

a) Soit $\|\cdot\|$ une norme matricielle. Montrer que s'il existe une norme vectorielle $|\cdot|$ qui est consistante avec $\|\cdot\|$, i.e. $|Ax| \leq \|A\||x|$ alors $\rho(A) \leq \|A\|$.

b) Soit $\|\cdot\|$ une norme matricielle sous-multiplicative, i.e. qui vérifie $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ pour toute matrice A, B. Soit $x \in \mathbb{C}^n$. Montrer que $|x| = \|[x, 0, \cdots, 0]\|$ définit une norme vectorielle consistante avec $\|\cdot\|$. Conclure.

c) Considérons à présent une norme subordonnée. Trouver une norme vectorielle qui lui est consistante et conclure. Montrer également qu'une norme subordonnée est sous-multiplicative.

d) Donner l'exemple d'une norme non subordonnée et sous-multiplicative (on pourra redémontrer ces deux points).

e) Montrer que $\|A\|_p = (\sum_{i,j} |A_{i,j}|^p)^{1/p}$, $p > 2$, définit une norme mais qu'elle n'est pas sous-multiplicative.

Exercice 6 : Intérêt du conditionnement

a) Montrer que le conditionnement d'une matrice est supérieur ou égal à 1 pour n'importe quelle norme subordonnée.

b) Calculer le conditionnement de $A = \begin{pmatrix} 1 & 100 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour la norme 1.

c) Résoudre $Ax_1 = b_1$ puis $Ax_2 = b_2$ avec

$$b_1 = \begin{pmatrix} 100 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } b_2 = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

d) Calculer $\|x_1 - x_2\|_1/\|x_1\|_1$ et $\|b_1 - b_2\|_1/\|b_1\|_1$.

e) Conclure.

Exercice 7 : Conditionnement et déterminant

a) Calculer le déterminant et le conditionnement de la matrice diagonale d'ordre n $diag(1, 10, \cdots, 10)$.

b) Construire une matrice telle que son déterminant soit bien plus petit que son conditionnement.

c) Conclure.

Exercice 8 : Conditionnement

Soit A la matrice d'ordre n triangulaire supérieure, bidiagonale définie par $A_{i,i} = 1$, $A_{i,i+1} = 2$ et $A_{i,j} = 0$ si $j \neq i$ et $j \neq i + 1$.

a) Calculer le déterminant de A.

b) Soit N une matrice nilpotente, i.e. telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $N^p = 0$. Vérifier que l'inverse de $Id + N$ vaut $(Id + N)^{-1} = \sum_{k=0}^{p-1} (-N)^k$.

c) Décomposer A sous la forme $A = Id + 2N$ avec N une matrice nilpotente et calculer A^{-1}.

d) Calculer le conditionnement de A pour la norme 1.