Université de Picardie Jules Verne — Licence 3 : Analyse Matricielle

TD 1 : Caley-Hamilton, Gershgorin-Hadamard, Matrices par bloc. — Année 2011-2012

Exercice 1 : Inverse de matrices par Caley-Hamilton

a) Montrer que deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

b) Soit $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$. On note p son polynôme caractéristique ; on l'écrit :

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i.$$

Montrer que A est inversible ssi $a_0 \neq 0$.

c) Enoncer le Théorème de Caley-Hamilton.

d) Soit $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ inversible, montrer que

$$A^{-1} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_0} A^{i-1}.$$

Exercice 2 : Démonstration du théorème de Gershgorin-Hadamard

Soit $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$. On définit le i^{eme} disque de Gerschgorin comme suit :

$$D_i = \{z \in \mathbb{C} / |z - A_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |A_{i,j}|\}.$$

a) Soit (λ, W) un élément propre de A. Expliciter la i^{eme} ligne de l'équation matricielle $AW = \lambda W$.

b) Soit i_0 tel que $|W_{i_0}| = \max_i |W_i|$. Montrer que $\lambda \in D_{i_0}$.

c) Montrer que les valeurs propres de A appartiennent à la réunion des N disques de Gerschgorin.

Exercice 3 : Application du théorème de Gershgorin-Hadamard

a) Soit $A \in \mathbf{M}_3(\mathbb{C})$ donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & 0 & -1+i \\ 0 & -3 & i \\ -1+i & i & 2-2i \end{pmatrix}.$$

Identifier des régions du plan complexe où peuvent se trouver les valeurs propres de A.

b) Même question pour B en remarquant que B est hermitienne :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 : Matrices à diagonale strictement dominante

Soit $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ à diagonale strictement dominante, i.e. qui vérifie la propriété suivante :

$$\forall i, 1 \leq i \leq n, \;\; |A_{ii}| > \sum_{j \neq i} |A_{ij}|.$$

Utiliser le théorème de Gershgorin pour montrer que si A est à diagonale strictement dominante alors A est inversible.

Exercice 5 : Produits de matrices définies par blocs

Soit $M \in \mathbf{M}_{m_1+m_2,n_1+n_2}(\mathbb{C})$ et $N \in \mathbf{M}_{n_1+n_2,p_1+p_2}(\mathbb{C})$ deux matrices définies par bloc :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \qquad N = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix},$$

avec $A \in \mathbf{M}_{m_1,n_1}(\mathbb{C})$, $B \in \mathbf{M}_{m_1 \times n_2}(\mathbb{C})$, $C \in \mathbf{M}_{m_2,n_1}(\mathbb{C})$, $D \in \mathbf{M}_{m_2,n_2}(\mathbb{C})$, $X \in \mathbf{M}_{n_1,p_1}(\mathbb{C})$, $Y \in \mathbf{M}_{n_1,p_2}(\mathbb{C})$, $Z \in \mathbf{M}_{n_2,p_1}(\mathbb{C})$ et $W \in \mathbf{M}_{n_2,p_2}(\mathbb{C})$.

Calculer le produit MN.

Exercice 6 : Déterminant de matrices définies par blocs

Soit $M \in \mathbf{M}_{m_1+m_2,n_1+n_2}(\mathbb{C})$ la matrice définie par bloc suivante :

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

où $A \in \mathbf{M}_{m_1,n_1}(\mathbb{C})$ est une matrice inversible.

a) Trouver trois matrices X, Y et Z telles que

$$M = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Id & Y \\ 0 & Z \end{pmatrix}.$$

b) Montrer que $\det(M) = \det(A)\det(B)$.