Exercice 1 : Jacobi, Gauss-Seidel

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Ecrire l'itération $k+1$ de l'algrithme de Jacobi appliqué à A.

b) Ecrire l'itération $k+1$ de l'algrithme de Gauss-Seidel appliqué à A.

c) Etudier la convergence des algorithmes de Jacobi et Gauss-Seidel appliqués aux matrices A et B.

d) Quel enseignement tire-t-on de la question précédente ?

e) Comment se comporte la suite $X^{k+1} = MX^k$ quand $\rho(M) = 0$? Calculer les premières itérations de l'algorithme de Jacobi appliqué à A pour un X^0 quelconque.

Exercice 2 : Un résultat de convergence pour la méthode S.O.R.

Soit A une matrice à diagonale strictement dominante d'ordre N. On souhaite montrer que si $0 < \omega \leq 1$ alors la méthode de relaxation converge.

On décompose A sous la forme (habituelle) $A = D - E - F$ avec D, E et F respectivement les parties diagonale, inférieure et supérieure de la matrice A.

Dans toute la suite on suppose $0 < \omega \leq 1$.

a) On note $\mathcal{L}_\omega$ la matrice d'itération de la méthode de relaxation. On pose $L = D^{-1}E$ et $U = D^{-1}F$. Réécrire $\mathcal{L}_\omega$ en fonction de L et U et montrer que p, son polynôme caractéristique s'écrit :

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(-\lambda(Id - \omega L) + (1-\omega)Id + \omega U) \\ &= (1 - \lambda - \omega)^N \det(Id - \alpha(\lambda)L - \beta(\lambda)U), \end{aligned}$$

où $\alpha(\lambda) = \lambda\omega/(\lambda + \omega - 1)$ et $\beta(\lambda) = \omega/(\lambda + \omega - 1)$.

On suppose qu'il existe une valeur propre μ de $\mathcal{L}_\omega$ telle que $|\mu| \geq 1$.

b) Montrer que μ ne peut être racine du polynôme $\lambda \to \lambda + \omega - 1$.

c) On écrit ce μ sous la forme $\mu = re^{i\theta}$, $r \geq 1$. Montrer qu'alors on a $|\beta(\mu)| \leq |\alpha(\mu)| < 1$.

d) Montrer que $Id - L - U$ est à diagonale strictement dominante.

e) Montrer que dans le cas $|\mu| \geq 1$, $Id - \alpha(\mu)L - \beta(\mu)U$ est à diagonale strictement dominante et en déduire que $Id - \alpha(\mu)L - \beta(\mu)U$ est inversible.

f) Conclure.