Exercice 1 : Estimation du conditionnement

Toutes les matrices de cet exercice sont réelles et de taille $n \times n$.

a) **i)** Supposons qu'il existe $\theta > 0$ tel que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $|AX| \geq \theta |X|$ pour $|\cdot|$ une norme vectorielle sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que A est inversible.

ii) Montrer la réciproque : supposons A inversible, trouver $\theta > 0$ tel que $|AX| \geq \theta|X|$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$. (Indice : θ dépend de A^{-1}).

b) Soit $|\cdot|$ une norme vectorielle sur $\mathbb{R}^n$ et X, Y et Z trois vecteurs de $\mathbb{R}^n$ quelconques. Montrer les inégalités suivantes :
- $|X + Y| \geq |X| - |Y|$.
- $|X + Y + Z| \geq |X| - |Y| - |Z|$.

Ce résultat sera utilisé pour répondre aux questions **c)** et **f)**.

c) Montrer que si A est inversible, alors $A + E$ est inversible pour toute matrice E telle que $\|E\| < \delta$ (à déterminer) où $\|\cdot\|$ est une norme matricielle subordonnée.

d) Soit A inversible.

i) Ecrire la contraposée du résultat démontré précédemment.

ii) Soit E telle que $B = A + E$ est singulière. Montrer alors que :

$$\frac{1}{\mathrm{cond}(A)} \leq \frac{\|A - B\|}{\|A\|},$$

où $\|\cdot\|$ est une norme matricielle subordonnée.

e) Utiliser le résultat précédent pour estimer le conditionnement en norme 1 des matrices suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1.0001 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } A_2 = \begin{pmatrix} 3.9 & 1.8 \\ 6.2 & 2.7 \end{pmatrix}.$$

Vérifier l'estimation en calculant le conditionnement exact de ces matrices.

f) Pour A à diagonale strictement dominante, trouver $\theta > 0$ tel que $|AX|_\infty \geq \theta|X|_\infty$. Conclure.

Exercice 2 : Préconditionnement

On a déjà vu qu'un système $AX = b$ mal préconditionné risquait de mener à une solution numérique peu précise. On se propose ici de transformer le système linéaire $AX = b$ en un système mieux conditionné.

a) Montrer que diviser chaque ligne i du système $AX = b$ par $\max_j |A_{i,j}|$ revient à résoudre $RAX = Rb$ avec R à déterminer.

b) Montrer que diviser chaque colonne j du système $AX = b$ par $\max_i |A_{i,j}|$ revient à résoudre $ACY = b$, $Y = C^{-1}X$ avec C à déterminer.

c) Donner la formulation matricielle obtenue quand les deux manipulations précédentes sont effectuées successivement au système $AX = b$. Appliquer ce résultat au système linéaire suivant et vérifier que le nouveau système est mieux conditionné que le système initial :

$$\begin{pmatrix} 10 & 100 \\ 0.1 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 : Factorisation QR : Existence et unicité

Soit $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ une matrice de rang n avec $n < m$.

a) Quelle sont les dimensions de $A^t A$?

b) Montrer que $A^t A$ est une matrice symétrique définie positive.

c) Montrer qu'il existe $R \in \mathbb{R}^{n,n}$, triangulaire supérieure et inversible telle que

$$A^t A = R^t R.$$

d) **i)** Soit $Q \in \mathbb{R}^{m,n}$. Montrer que si $Q^t Q = Id_n$, alors les vecteurs colonnes de Q constituent une famille orthonormée de $\mathbb{R}^m$. Une matrice vérifiant cette propriété est dite de *Stiefel*.

ii) Quel cas particulier de matrice de Stiefel connaissez-vous ?

e) Montrer que $Q = AR^{-1}$ est une matrice de Stiefel telle que $A = QR$.

f) Montrer que cette factorisation QR est unique si on cherche R telle que ses éléments diagonaux soient strictement positifs.

g) Expliquer comment utiliser la factorisation QR de A pour résoudre $AX = b$, $A \in \mathbb{R}^{m,m}$ et $b \in \mathbb{R}^m$.

Exercice 4 : Factorisation QR : construction par Gram-Schmidt

Soit $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ une matrice de rang n avec $n < m$.

a) Soit $\{a_1, \cdots, a_n\}$, n vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^m$. Rappeler comment on obtient $\{q_1, \cdots, q_n\}$ une base orthonormée de l'espace engendré par les $(a_i)_i$ par l'algorithme de Gram-Schmidt.

b) Expliquer comment utiliser le procédé de Gram-Schmidt pour construire $Q \in \mathbb{R}^{m,n}$, une matrice de Stiefel et $R \in \mathbb{R}^{n,n}$, une matrice triangulaire supérieure telles que $A = QR$.

c) Appliquer cette méthode pour factoriser la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

d) Ecrire en pseudo-code l'algorithme de construction de Q et R. On utilisera, bien sûr, l'algorithme de Gram-Schmidt modifié.