Exercice 1 : Inversion de matrice

a) Montrer que si $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible alors la matrice A^tA est symétrique définie positive.

b) Soit $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Vérifier que

$$A^{-1} = (A^tA)^{-1}A^t.$$

On en déduit que le problème d'inversion de la matrice A peut se ramener au problème d'inversion d'une matrice symétrique définie positive. C'est l'objet de l'exercice suivant.

Exercice 2 : Complément de Schur

Soit $A \in \mathbf{M}_{n+m}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive que l'on écrit par bloc de la façon suivante :

$$A = \begin{pmatrix} B & C^t \\ C & D \end{pmatrix},$$

où $B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathbf{M}_m(\mathbb{R})$ sont des matrices symétriques.

a) Montrer que B et D sont définies positives.

b) Trouver trois matrices $X \in \mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $S \in \mathbf{M}_m(\mathbb{R})$ et $Z \in \mathbf{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ telles que

$$A = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ X & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & Z \\ 0 & I_m \end{pmatrix}, \tag{1}$$

où I_n (resp. I_m) sont les matrices identité sur $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{R}^m$).
La matrice S est appelée "complément de Schur".

c) Montrer que S est symétrique définie positive. On utilisera la décomposition (1) et le fait que A est elle-même définie positive.

d) Montrer que $\det(A) = \det(B)\det(S)$.

e) On considère la matrice :

$$A_1 = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ X & I_m \end{pmatrix}.$$

Montrer que A_1 est inversible et calculer son inverse.

f) En écrivant $A = A_1A_2A_3$ (voir (1)) et en calculant A_1^{-1}, A_2^{-1} et A_3^{-1}, montrer la formule suivante :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} + B^{-1}C^tS^{-1}CB^{-1} & -B^{-1}C^tS^{-1} \\ -S^{-1}CB^{-1} & S^{-1} \end{pmatrix}.$$

g) Utiliser cette formule pour calculer l'inverse de

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(on vérifiera que les hypothèses sont réunies pour appliquer cette formule).

h) Expliquer en quoi la formule de la question **f**) permet de simplifier la calcul de l'inverse de A. Décrire le principe d'un algorithme qui appliquerait récursivement cette formule.

Exercice 3 : Quotient de Rayleigh

Soit A une matrice hermitienne d'ordre n, on appelle quotient de Rayleigh de la matrice A l'application $r_A : \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$r_A(x) = \frac{(Ax, x)}{(x, x)},$$

où $(\cdot, \cdot)$ désigne le produit scalaire hermitien. On rappelle que si A est une matrice hermitienne, les valeurs propres de A sont réelles et ses vecteurs propres forment une base orthonormée de $\mathbb{C}^n$.

a) En décomposant le vecteur x dans la base des vecteurs propres, montrer que :

$$\lambda_n = \max_{x \neq 0} r_A(x),$$
$$\lambda_1 = \min_{x \neq 0} r_A(x),$$

où les $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont les valeurs propres de A, avec $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$.

b) Soient A et B deux matrices hermitiennes. Montrer que $r_{A+B}(x) = r_A(x) + r_B(x)$.

c) Soient A et $B = A + \delta A$ deux matrices hermitiennes de valeurs propres respectives $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ et $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots \leq \mu_n$. Montrer que

$$|\lambda_n - \mu_n| \leq \|\delta A\|_2.$$