Exercice 1 : Etude préliminaire

a) Résoudre “ à la main” l’équation :

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dx} = -\sin(x) \text{ sur } [0, 2\pi], \\ u(0) = 1. \end{cases} \tag{1}$$

b) On cherche ici à approcher la solution de (1) par la méthode d’Euler, *i.e* en construisant la suite

$$\begin{cases} v_{i+1} = v_i - \Delta x \sin(x_i) \text{ pour } 1 \leq i \leq N-1, \\ v_1 = 1, \end{cases} \tag{2}$$

avec $x_i = (i-1)\Delta x$, $1 \leq i \leq N$ et $\Delta x = 2\pi/(N-1)$.
Ecrire une fonction *euler* qui prend en argument d’entrée N et qui renvoie cette suite. Tester la fonction pour plusieurs N et vérifier, par un graphique, que la quantité v_i approche $u(x_i)$.

c) Expliquer en quoi l’exemple suivant montre l’intérêt de la méthode d’Euler :

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dx} = -\dfrac{\sin(x^2)e^{x^2}\cos(x)}{(x^{10}+10)} \text{ sur } [0, \pi], \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

Transformer la procédure *euler* en ajoutant en arguments d’entrée a et b, les bornes de l’intervalle d’étude et f le nom de la fonction qui contient le second membre de l’équation.

d) Résoudre à présent :

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dx} = \cos(u) \text{ sur } [0, \pi], \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

Exercice 2 : Modélisation du déplacement d’un ressort

L’équation différentielle suivante régit le mouvement d’un ressort :

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \\ x(0) = x_0, \\ \dot{x}(0) = v_0. \end{cases} \tag{3}$$

a) En introduisant la nouvelle variable $y = \dot{x}$, réécrire l’équation différentielle (3) sous la forme d’un système différentiel du premier ordre $\dot{X} = AX$.

b) Utiliser la méthode d’Euler vue à l’exercice 1 pour approcher la solution de ce système.

c) Etudier l’influence des paramètres physiques λ et ω_0.

d) Etudier de même l’influence des conditions initiales x_0 et v_0.

Exercice 3 : Modélisation du mouvement d'un pendule amorti

L'équation différentielle qui décrit le mouvement d'un pendule constitué d'une masse m et d'une tige de longueur l est donnée par :

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin(\theta) - \frac{k}{l^2 m}\dot{\theta},$$

où k est le coefficient représentant le frottement visqueux auquel est soumis le pendule et $g = 9.81 ms^{-2}$ la constante du champ de gravitation terrestre.
Reprendre les questions de l'exercice précédent.

Exercice 4 : Simulation du mouvement d'un satellite

On considère un point matériel O de grande masse M et un satellite de petite masse m. Ce satellite est repéré (dans un référentiel centré sur le centre de gravité du système $\{M, m\}$, ici confondu avec O) à l'instant t_i par le vecteur $\overrightarrow{R}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$ et la vitesse $\overrightarrow{V}_i$. A cet instant le point O exerce la force $\overrightarrow{F}_i = \frac{-GmM}{\|\overrightarrow{R}_i\|^3}\overrightarrow{R}_i$ (G est une constante universelle) sur le satellite ce qui lui communique une accélération $\overrightarrow{\Gamma}_i$.

a) Ecrire la loi fondamentale de la dynamique au temps t_i.

b) A l'instant $t_{i+1} = t_i + h$, h étant un court intervalle de temps, la position du satellite est $\overrightarrow{R}_{i+1} = \begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix}$ et sa vitesse $\overrightarrow{V}_{i+1}$. En utilisant les approximations $\overrightarrow{\Gamma}_i \simeq \frac{1}{h}(\overrightarrow{V_{i+1}} - \overrightarrow{V}_i)$ et $\overrightarrow{V}_i \simeq \frac{1}{h}(\overrightarrow{R}_{i+1} - \overrightarrow{R}_i)$ exprimer $\overrightarrow{R}_{i+1}$ puis $\overrightarrow{V}_{i+1}$ en fonction de $\overrightarrow{R}_i, \overrightarrow{V}_i, h$ et de $GM = 398200\ km^3\ s^{-1}$.

c) Effectuer une simulation du mouvement du satellite, en prenant $h = 5\ s$ et en considérant différentes conditions initiales (valeurs de $\overrightarrow{R}_0, \overrightarrow{V}_0$). A titre indicatif, le rayon de la Terre vaut 6371 km et pour l'ordre de grandeur de $\|\overrightarrow{V}_0\|$ on peut prendre 10 $km\ s^{-1}$. On représentera chaque trajectoire obtenue dans un repère Oxy

d) On tient maintenant compte d'une force supplémentaire (vent solaire) s'exerçant sur le satellite. On suppose que cette force est constante dans le temps, d'intensité s, et dirigée le long de l'axe x. Examiner, pour différentes valeurs de s, la modification que cette force entraine sur la trajectoire du satellite.