Exercice 1 : Convergence uniforme

a) Rappeler la définition des convergences simple et uniforme d'une suite de fonctions.

b) Mettre en évidence la convergence simple de la suite $f_n(x) = nx^n(1-x)$ sur $[0,1]$. On demande ici d'appliquer la définition mathématique : on se donnera explicitement un x, un ϵ etc.

c) Cette suite converge-t-elle uniformément ? Faire un graphique qui illustre votre réponse.

d) Mêmes questions avec $g_n(x) = n^{1/4}x^n(1-x)$ sur $[0,1]$.

e) Mêmes questions avec $h_n(x) = (\sin(x))^n$ sur $[0,\pi]$.

Exercice 2 : Développement de sinus

a) Rappeler le développement en série entière de la fonction sinus.

b) Tracer successivement la somme des 2, 3, 4 etc. premiers termes.

Exercice 3 : Phénomène de Gibbs

Soit f la fonction 2π-périodique définie par :

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2} \text{ sur } [0, 2\pi[.$$

a) Donner le développement en série de Fourier de la fonction f.

b) Tracer la suite de fonctions

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k},$$

pour plusieurs valeurs de n.

c) Quelle est la limite simple de cette suite ?

Exercice 4 : Phénomène de Gibbs (explication)

Soit f la fonction 2π-périodique définie par :

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2} \text{ sur } [0, 2\pi[.$$

a) Donner le développement en série de Fourier de la fonction f.

b) On considère la suite de fonctions :

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}.$$

Quelle est la limite simple de cette suite ?

c) On va étudier la convergence uniforme de f_n sur un intervalle de $]0, 2\pi[$.

i. Soit $g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin(kx)$. En écrivant que $\sin(kx)$ est la partie imaginaire de e^{ikx}, montrer que :

$$g_n(x) = \frac{\sin(\frac{nx}{2}) \sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin(\frac{x}{2})}.$$

ii. En déduire que pour tout $x \in [a, 2\pi - a]$ (pour un $a \in]0, \pi/2[$) on a $|g_n(x)| \leq 1/\sin(a/2)$.

iii. En écrivant $\sin(kx) = g_k(x) - g_{k-1}(x)$, exprimer $f_{n+p}(x) - f_n(x)$ en fonction des éléments de la suite $(g_n)_n$. Utiliser la majoration trouvée en ii. pour majorer $|f_{n+p}(x) - f_n(x)|$ sur $[a, 2\pi - a]$ comme suit :

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{\sin(\frac{a}{2})} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+1} \right).$$

iv. En déduire une majoration de $|f(x) - f_n(x)|$ sur $[a, 2\pi - a]$ par un terme ne dépendant que de n.

v. Conclure sur la convergence uniforme de f_n vers f sur $[a, 2\pi - a]$.

d) On s'interesse ici au comportement de la série de Fourier au voisinage de 0.

i. Montrer que la fonction f_n atteint son extremum en

$$\frac{2\alpha\pi}{2n+1}, \ \alpha \in \mathbb{Z}.$$

On note $x_n = \frac{2\pi}{2n+1}$ la plus petite (en valeur absolue) de ces valeurs.

ii. On montre (les plus motivés des lecteurs essaieront de retrouver la demonstration en utilisant une somme de Riemann pour intégrer $\sin(\sigma)/\sigma$ sur $[0, \pi]$) que :

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x_n) = \int_0^{\pi} \frac{\sin(\sigma)}{\sigma} \, d\sigma.$$

Utiliser les relations suivantes, obtenues par développement en série de $\sin(\sigma)$,

$$\sigma - \frac{\sigma^3}{3!} + \frac{\sigma^5}{5!} - \frac{\sigma^7}{7!} \leq \sin(\sigma) \leq \sigma - \frac{\sigma^3}{3!} + \frac{\sigma^5}{5!},$$

pour trouver M_1 et M_2 deux constantes telles que

$$\frac{\pi}{2} M_1 \leq \int_0^{\pi} \frac{\sin(\sigma)}{\sigma} \, d\sigma \leq \frac{\pi}{2} M_2.$$

iii. Donner une valeur approchée de M_1 et M_2. Que déduisez-vous de ce calcul ? Faites le lien avec les résultats obtenus à l'exercice précédent.