Exercice 1 : Comparaison des méthodes de Gauss et de Cramer

a) Résoudre "à la main" par la méthode de Cramer puis par la méthode de Gauss le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 3x + 2y - z &= 10, \\ -x + 3y + 2z &= 5, \\ x - y - z &= -1. \end{cases}$$

Vérifier le résultat avec Matlab.

b) Sachant qu'un ordinateur actuel a une capacité de 5000 MFlops environ (MFlops = Millions of Floating Point Operations Per Second) combien de temps faut-il à chacune de ces méthodes pour résoudre un système de taille 50 ?

Exercice 3 : Résolution d'un système linéaire par la méthode de Gauss (programmation)

a) Matlab résout de façon très efficace un système linéaire. Nous nous proposons ici de reprogrammer une méthode de résolution classique (la méthode de Gauss) pour en comprendre le fonctionnement.
Programmer une fonction *gauss* qui résout le système $Ax = b$ où A et b sont respectivement une matrice et un vecteur donnés en argument. On utilisera des boucles *for* et aucune fonctionnalité propre à Matlab.

b) Mettre en oeuvre une stratégie de pivot partiel.

Exercice 4 : Vecteurs propres, Valeurs propres

Définir la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Ecrire les instructions qui calculent la trace et le déterminant de A.

b) Calculer le polynôme caractéristique avec la commande *poly* et en chercher les racines avec la commande *roots*.

c) Calculer les valeurs et vecteurs propres de A en utilisant la fonction *eig*.

d) Diagonaliser la matrice A, i.e. écrire A sous la forme PDP^{-1} avec D une matrice diagonale.

Exercice 5 : Moindres carrés

Considérons le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 + x_2 & = & 3, \\ -2x_1 + 3x_2 & = & 1, \\ 2x_1 - x_2 & = & 2. \end{array}\right. \qquad (1)$$

a) Montrer que ce système n'a pas de solution.

b) On écrit ce système sous la forme $AX = b$. La méthode des moindres carrés consiste à chercher X_0 tel que $||AX_0 - b||^2$ soit minimal ($\| \cdot \|$ est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^3$). Trouver la meilleure solution approchée du système (1). Représenter graphiquement la situation.

c) Etant donnée une série de points expérimentaux $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq n}$, on cherche la fonction affine $y = ax+b$ qui approche ces points dans le sens décrit ci dessus. Exprimer a et b en fonction des $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq n}$. Choisir un nuage de points et programmer les formules trouvées précédemment. Représenter graphiquement la situation.