Exercice 1 : Transformation du plan I

a) Ecrire une fonction *symaxiale* qui calcule l'image d'un point par une symétrie axiale. Cette fonction prend en arguments d'entrée les coordonnées du point stockées dans un vecteur ainsi que les coefficients nécessaires à la définition de l'équation de la droite. Elle renvoie les coordonnées du symétrique du point par rapport à la droite.

b) Tracer la fonction sinus sur l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$. Tracer l'image de cette courbe par la symétrie d'axe $y = x$. Quelle courbe reconnait-on ? Retrouver de cette façon les fonctions arccosinus et arctangente.

Exercice 2 : Transformation du plan II

a) Ecrire une fonction *similitude* qui calcule l'image d'un point par une similitude de centre 0, d'angle θ et de rapport k. La fonction *similitude* a pour argument d'entrée les coordonnées du point dont on veut calculer l'image ainsi que θ et k.

b) Représenter sur un graphique un polygone T_0 (par exemple un carré). Représenter sur ce même graphique les polygones T_i, $1 \leq i \leq 50$ telles que T_i soit la transformée de T_{i-1} par la similitude de centre O, d'angle 5 degrés et de rapport 0.95.
Faire une jolie animation.

Exercice 3 : Image fractale

Le but de cet exercice est de construire le célèbre flocon de neige dit de *von Koch*.

a) Ecrire une fonction *brise* qui crée la ligne brisée $A_1B_1B_2B_3A_2$ à partir du segment A_1A_2 décrit sur la figure 1. Cette fonction prend en argument d'entrée une matrice P de taille 2×2 dont la première colonne est composée des coordonnées de A_1 : $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, et la deuxième colonne des coordonnées de A_2 : $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$.
Cette fonction renvoie une matrice Q de taille 2×3 dont la première colonne est composée des coordonnées de B_1 : $\begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{pmatrix}$, la deuxième colonne des coordonnées de B_2 : $\begin{pmatrix} x'_2 \\ y'_2 \end{pmatrix}$, et la troisième colonne des coordonnées de B_3 : $\begin{pmatrix} x'_3 \\ y'_3 \end{pmatrix}$. Les coordonnées de B_1, B_2 et B_3 sont données par les formules :

$$\begin{array}{ll} x'_1 = (2x_1 + x_2)/3, & y'_1 = (2y_1 + y_2)/3, \\ x'_2 = (x_1 + x_2)/2 + (y_2 - y_1)/2\sqrt{3}, & y'_2 = (y_1 + y_2)/2 + (x_1 - x_2)/2\sqrt{3}, \\ x'_3 = (x_1 + 2x_2)/3, & y'_3 = (y_1 + 2y_2)/3. \end{array}$$

b) Tester la fonction *brise* quand $(x_1, y_1) = (\sqrt{3}/2, 0)$ et $(x_2, y_2) = (0, 3/2)$: tracer le segment A_1A_2 puis la ligne brisée $A_1B_1B_2B_3A_2$.

c) Définir à présent un triangle équilatéral dont le segment A_1A_2 de la question précédente est un des côtés : on pourra comme précédemment définir une matrice T qui contient 2 lignes (abscisse/ordonnée) et autant de colonnes qu'il faut de points pour définir ce triangle. Tracer ce triangle.

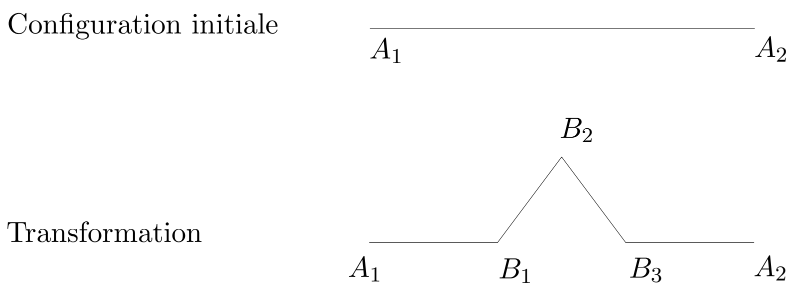

FIGURE 1 –

d) On souhaite à présent appliquer la transformation *brise* à chacun des côtés du triangle. On applique ensuite la transformation *brise* à chaque morceau de la ligne brisée ainsi construite. Et on réitère cette manipulation 5 fois. Voici le corps du programme que vous devez compléter :

```
for j=1:5
   ->mettre dans une variable m le nombre de colonnes de la matrice T
   Q=[];                 % Q contiendra les coord. des sommets de la nouvelle figure.
   for i=1:m-1
      Q = [Q,T(:,i)];     % le ieme point de T doit  etre ajout\'e à Q
      ->Il faut ajouter a Q les trois nouveaux points cr\'e\'es par brise.
   end
   Q = [Q,T(:,m)];
   ->afficher la nouvelle figure
   T = Q;                % on peut de nouveau appliquer la procedure
                           a la nouvelle figure
end
```

Exercice 4 : Ensembles de Julia

Soit $c \in \mathbb{C}$. Pour une valeur initiale $z_0 \in \mathbb{C}$ donnée, on considère la suite récurrente de $\mathbb{C}$:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c.$$

L'ensemble de Julia est l'ensemble de toutes les valeurs initiales z_0 pour lesquelles la suite $(z_n)_n$ est bornée.

Le but de cet exercice est de tracer quelques uns de ces ensembles. Pour cela :

— A l'aide de l'instruction `meshgrid`, construire la grille $[-L, L] \times [-L, L]$ définie dans le plan complexe. On prendra $L = 1.5$.

— Calculer les N premiers termes de la suite $(z_n)_n$ pour toutes les données initiales de $[-L, L] \times [-L, L]$ (vous utiliserez ici UNE boucle *for* sur les n). On prendra $N = 30$ et successivement $c = -0.745429$, $c = 0.27334 - i * 0.00742$ puis $c = 0.285 + 0.01 * i$.

— Expliquer pourquoi tracer la surface suivante permet d'observer l'ensemble de Julia :

$$z_0 \rightarrow e^{-|z_N|}.$$

Utiliser l'instruction `Sgrayplot` pour tracer le fractal.