Université de Picardie Jules Verne — L2 : Programmation Scilab
TP4 : Suites numériques.

Exercice 1 : Représentation d'une suite

a) Rappeler la définition d'une suite convergente.

b) Etudier (théoriquement) la convergence des suites :
— $u_n = n^2 e^{-n}/(1+n)$.
— $u_{n+1} = u_n^2$, u_0 donné.
— $u_{n+1} = -u_n/2$, u_0 donné.
— $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$, $u_0 \geq -1$ donné.
Pour les suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$, on définira la fonction f grâce à l'instruction `deff`.

c) Représenter graphiquement chacune de ces suites : représenter u_n en fonction de n pour des valeurs de u_0 judicieusement choisies.

d) Illustrer graphiquement la définition rappelée en **a)** : pour un ϵ donné trouver un N tel que...

e) Visualiser la convergence de la moyenne de Césaro de la dernière suite.

f) Visualiser la convergence des suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$ en représentant $y = f(x)$, $y = x$ et les éléments de la suite sur le même graphique. Prévoir par la théorie le type de la convergence (en escargot, en escalier...).

Exercice 2 : Suite logistique

Soit $f(x) = ax(1-x)$ sur $[0,1]$ avec a un réel de $[0,4]$.
A partir d'un $u_0 \in [0,1]$ donné, on définit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Pour un N et un u_0 donnés, tracer $(u_n)_{0\leq n\leq N}$ en fonction de n pour plusieurs valeurs de $a \in]0,4]$. Quelle hypothèse faites-vous sur la convergence de la suite en fonction de a ? Quelle est l'influence de u_0 ?

b) Pour $a \in]3, 3.56[$, observer que la suite change de périodicité (observer une périodicité de 2, 4 etc.). On pourra tracer l'histogramme de la suite grâce à la fonction `histplot`.

c) Pour $a \in [3.57, 4]$, le comportement de la suite devient chaotique sauf exception. Visualiser ce comportement de nouveau avec la fonction `histplot`.

d) Pour résumer les comportements vus précédemment : tracer le diagramme de bifurcation de cette suite : tracer en fonction de a les valeurs prises par la suite après 100 termes : $u_{100}, u_{101} \cdots$ etc.
Faire un zoom sur l'intervalle $[2.82, 2.86]$

Exercice 3 : Suites récurrentes linéaires du second ordre

En 1202 le mathématicien italien Fibonacci a posé le problème suivant : Au temps $t = 0$ est né un couple de lapins (mâle, femelle). On suppose que les règles suivantes s'appliquent :
— La maturité sexuelle du lapin est atteinte après un mois qui est aussi la durée de gestation.
— Chaque portée comporte toujours un mâle et une femelle.
— Les lapins ne meurent jamais.

a) On note u_n le nombre de couples de lapins au mois n. Trouver la relation de récurrence qui permet de calculer u_n.

b) Calculer (sur le papier) u_n en fonction de n.

c) Comment se comporte cette suite à l'infini ? Quelle est la limite de u_{n+1}/u_n ?

d) Ecrire un programme qui conforte le résultat de la question précédente. On écrira deux versions de ce programme : une utilisera un tableau pour stocker les valeurs de la suite, l'autre n'utilisera que trois variables. Discuter les avantages et inconvénients des deux méthodes.

e) Vérifier numériquement les résultats suivants :

$$\sum_{i=0}^{n} u_i = u_{n+2} - 1 \qquad \sum_{i=0}^{n-1} u_{2i+1} = u_{2n}$$
$$\sum_{i=0}^{n} u_{2i} = u_{2n+1} - 1 \qquad \sum_{i=0}^{n} u_i^2 = u_n u_{n+1}.$$

f) Etudier théoriquement puis numériquement le comportement des suites :

$$\begin{cases} u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n \ n \geq 0, \\ u_0 = 5, \\ u_1 = 6, \end{cases} \qquad \begin{cases} u_{n+2} = -9u_n, \ n \geq 0 \\ u_0 = 5, \\ u_1 = 1. \end{cases}$$

Exercice 4 : Limite inf et sup

Soit $(u_n)_n$ une suite bornée. On introduit

$$v_n = \inf_{p \geq n} u_p, \qquad \text{et } \liminf u_n = \lim_{n+\infty} v_n,$$
$$w_n = \sup_{p \geq n} u_p, \qquad \text{et } \limsup v_n = \lim_{n+\infty} w_n.$$

a) Montrer que ces limites existent.

b) Déterminer les limite inférieure et supérieure de :

$$u_n = (-1)^n + \frac{1}{n+1}, \qquad u_n = e^{\frac{1}{n}} \cos(\frac{n\pi}{2}).$$

c) Représenter sur un même graphique les suites $(u_n)_n$, $(v_n)_n$, et $(w_n)_n$.

Exercice 5 : Accélération de suites : Richardson

a) Ecrire un programme qui calcule les N premiers termes de la suite :

$$x_{k+1} = \frac{2x_k}{\sqrt{2(1 + \sqrt{1 - (\frac{x_k}{2^k})^2})}} \text{ avec } x_0 = 2.$$

Rappeler quelle est la valeur de l, la limite de cette suite.

b) Accélérer deux fois cette suite grâce à la méthode de Richardson : visualiser les N premiers termes des suites accélérées $(y_k)_k$ et $(z_k)_k$.

c) Mettre en évidence l'accélération de ces deux suites en visualisant sur un même graphique les quantités $\log(|x_k - l|)$, $\log(|y_k - l|)$, $\log(|z_k - l|)$ en fonction de k.

Exercice 6 : Accélération de suites : Aitken

On suppose ici que Scilab ne sait pas calculer la racine d'un nombre. L'objectif de cet exercice est de calculer une approximation de $\sqrt{2}$.

a) Construire une suite récurrente $(u_n)_n$ définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ (f à trouver) qui converge vers $\sqrt{2}$.

b) Ecrire un programme qui calcule une approximation de $\sqrt{2}$ en calculant les premiers termes de la suite précédente.

c) Accélérer la suite précédemment construite par le procédé de Aitken. Mettre en évidence cette accélération.

d) Faire un programme qui calcule les N premiers termes de la suite de Héron. Observer la vitesse de convergence.

Exercice 7 : Suite de Syracuse

a) Calculer et visualiser les éléments de la suite de Syracuse de la forme $u_{n+1} = S(u_n)$ pour les données initiales $u_0 = 0$, puis $u_0 = 1, \cdots, u_0 = 256$. Vérifier la conjecture.

b) On peut représenter les entiers $u \in \{1, \cdots, 256\}$ dans le plan par les points en coordonnées polaires :

$$\begin{cases} \rho(u) = u \\ \theta(u) = 2\pi \dfrac{\ln(u)}{\ln(2)} \end{cases}$$

Tracer ces points en considérant leurs coordonnées cartésiennes.

c) Parcourir chaque $u \in \{1, \cdots, 256\}$ et relier les points u et $S(u)$ en rouge si u est pair et en vert si u est impair.

d) Faire maintenant une représentation 3D : les points définis en **b)** auront maintenant pour côte : u. Relier les points et leur image comme en **c)**.