Université de Picardie Jules Verne | L2 Maths : Analyse Numérique
TP 4 : Intégration numérique. | Année 2007-2008

Soit f une fonction suffisamment régulière, a et b deux réels tels que $a < b$. Le but de ce TP est d'approcher l'intégrale

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

à l'aide de différentes méthodes d'intégration numérique. La première étape consiste à diviser l'intervalle $[a, b]$ en n sous intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ de longueur $h = \dfrac{b-a}{n}$. On a $x_i = a + \dfrac{i-1}{h}$ pour $1 \leq i \leq n+1$.

Exercice 1 : Méthode du point milieu

- **a)** Rappeler la formule d'intégration obtenue par la méthode du point milieu.
- **b)** Ecrire la procédure *Ptmilieu* qui prend pour arguments a, b, f et n et qui renvoie l'approximation de $\int_a^b f(x)dx$ par la méthode du point milieu. Pour cela, à l'aide de la fonction *seq*, vous créerez la liste suivante :

$$(a + \frac{h}{2},\, a + \frac{h}{2} + h,\, a + \frac{h}{2} + 2h,\, \dots,\, a + \frac{h}{2} + (n-1)h).$$

  Vous sommerez ensuite les valeurs de f en ces points par la fonction *sum*.
- **c)** Valider cette procédure en vérifiant que cette méthode est exacte pour les polynômes de degré k avec k à préciser. Puis appliquer cette procédure à des fonctions "faciles" à intégrer.
- **d)** Soit $E(h) = |\int_a^b f(x)dx - I(h)|$ où $I(h)$ est l'approximation de l'intégrale calculée précédemment. Ecrire une procédure qui trace le logarithme de E en fonction du logarithme de h. Quel est l'ordre de la méthode du point milieu ? Tester avec les fonctions $\sin(x)$ sur $[0, \pi/2]$ et $1/x$ sur $[1, 3]$.

Exercice 2 : Méthode des trapèzes

Reprendre les questions de l'exercice 1 avec la méthode des trapèzes. Ici vous aurez besoin de la liste :

$$(a, a + h, a + 2h,\, \dots,\, a + nh).$$

Exercice 3 : Méthode de Simpson

Reprendre les questions de l'exercice 1 avec la méthode de Simpson.