Exercice 1 : Algorithme de Horner

On s'interesse à l'évaluation du polynôme $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ en un point donné en utilisant la forme de Horner : $P(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \cdots + x(a_{n-1} + xa_n)\cdots))$. Cet algorithme s'écrit :

$$\begin{cases} p_n &= a_n, \\ p_{k-1} &= a_{k-1} + xp_k \text{ pour } k = n,\, n-1,\, \cdots, 1. \end{cases}$$

a) Combien d'opérations nécessite l'évaluation du polynôme P en un point x par un calcul "classique" ? par l'algorithme de Horner ? Conclure.

b) Ecrire une procédure *Phorn* qui prend en arguments d'entrée un polynôme P et un point c et qui calcule $P(c)$ par l'algorithme de Horner.

c) Valider le programme.

d) Utiliser à présent la fonction prédéfinie de Maple *horner*.

Exercice 2 : Différences divisées

a) Ecrire le polynôme de Lagrange de f relatif aux points $(x_i)_{1\le i\le n}$ sous la forme de Newton.

b) Ecrire la relation de récurrence qui permet de calculer $f[x_i, \cdots, x_j]$, $i < j$.

c) Utiliser le diagramme suivant :

$$\begin{array}{lllll}
\boxed{f(x_1)} & & & & \\
f(x_2) & \boxed{f[x_1,x_2]} & & & \\
f(x_3) & f[x_2,x_3] & \boxed{f[x_1,x_2,x_3]} & & \\
f(x_4) & f[x_3,x_4] & f[x_2,x_3,x_4] & & \\
\vdots & & & & \\
f(x_{n-1}) & f[x_{n-2},x_{n-1}] & & & \\
f(x_n) & f[x_{n-1},x_n] & f[x_{n-2},x_{n-1},x_n] & \cdots\quad\cdots & \boxed{f[x_1,x_1,\cdots,x_n]}
\end{array}$$

pour calculer la liste des différences divisées associées aux données suivantes :

x_i	-3	-1	0	2	4
$f(x_i)$	2	0	2	-1	1

d) Le diagramme précédent est stocké dans une la partie inférieure d'une matrice M.
- Quel élément se trouve en $M_{i,j}$?
- Comment calcule-t-on $M_{i,j}$ en fonction des autres éléments de M ?

e) - Ecrire une procédure *diffdiv* qui prend en arguments d'entrée deux vecteurs X et Y qui contiennent respectivement les abscisses et ordonnées des points que l'on souhaite interpoler. Cette procédure calcule les différences divisées nécessaires à la construction du polynôme de Lagrange.

- Vérifier la procédure en utilisant le résultat de la question **c)**

f) - Ecrire une procédure *newt* qui prend en argument d'entrée un vecteur contenant les abscisses de n points et qui calcule le polynôme de Lagrange associé à une fonction f donnée.

- Tester la procédure *newt* avec $f(x) = 1 + sin(3x)$ sur $[0, 2]$ et représenter sur un même graphique f et P.