Exercice 1 : Polynôme de Lagrange

On se propose d'écrire un programme qui calcule le polynôme d'interpolation de Lagrange en n points donnés.

a) Rappeler (sur le papier) l'expression du polynôme de Lagrange qui passe par les points de coordonnées (x_i, y_i) $1 \leq i \leq n$.

b) Définir la liste $X = (0, 1, 2, 4, 5)$. Construire, à l'aide de la fonction *product*, la fonction qui dépend des deux variables x et i et qui vaut :

$$\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (x - x_j),$$

où x_j désigne le $j$ème élément de la liste X.

b) Construire la liste $Y = (0, 16, 48, 88, 0)$. Construire le polynôme qui passe par les points de coordonnées $(x_j, y_j)_{1 \leq j \leq 5}$ où y_j désigne le $j$ème élément de la liste Y. On utilisera pour cela la fonction précédemment définie et la fonction *sum*.

c) Représenter le polynôme et les points d'interpolation sur un même graphique.

d) Utiliser à présent la fonction *interp* de Maple pour calculer ce polynôme.

Exercice 2 : Phénomène de Runge

Soit $f(x) = 1/(1 + x^2)$ où $x \in [-5, 5]$.

a) Ecrire une procédure *Runge* qui calcule le polynôme d'interpolation de f aux points donnés par un vecteur X passé en argument. Cette procédure utilisera la fonction *interp* de Maple. Elle représentera le polynôme d'interpolation, la fonction f et les points d'interpolation sur un même graphique.

b) Construire une procédure *Equi* qui prend en argument un entier n et qui renvoie le vecteur constitué des points équidistants $x_i = -5 + i * h$, $h = 10/n$.

c) Tester la procédure *Runge* sur *Equi(n)*. On prendra successivement $n = 10$, $n = 15$ et $n = 20$. Il y a-t-il convergence uniforme des polynômes de Lagrange vers la fonction f ?

d) Tester la procédure *Runge* avec x constitué des zéros du polynôme de Tchebychev $T_{n+1}(x) = \cos((n+1) arccos(x))$ (on pourra écrire une procédure *Tcheby(n)* qui a un n donné fait correspondre le vecteur $x = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ avec $x_i = 5 \cos((2i + 1)\pi/(2n + 2))$).

Exercice 3 : Autre interpolation

Soit $f(x) = e^x$ où $x \in [0, 1]$.

a) Déterminer P le polynôme de degré 2 qui interpole f aux points 0, 1/2 et 1. Pour cela on écrira un système linéaire que l'on demandera à maple de résoudre grâce à la fonction *solve*.

b) Soit $J(a_0, a_1, a_2) = \int_0^1 |f(x) - Q(x)|^2 \, dx$, où $Q(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$, $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer les coefficients a_0, a_1 et a_2 qui minimisent $J(a_0, a_1, a_2)$ grâce à la fonction *minimize*.

c) Représenter sur un même graphique les fonctions f, P et Q. Utiliser des couleurs différentes pour chaque courbe et des légendes.

d) Comparer P et Q.