Exercice 1

Soit f une application de $[0,1]$ dans $[0,1]$ continue. Montrer que f possède au moins un point fixe. On pourra considérer l'application $g(x) = f(x) - x$.

Exercice 2

Soit f une fonction de classe C^2 sur l'intervalle fermé I. On suppose que f admet un unique zéro a sur I. On introduit la fonction définie sur I telle que

$$g(x) = x - \alpha f(x),$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}_+^\star$.

a) Montrer que g possède un unique point fixe.

b) Si pour tout x de I la dérivée de f vérifie $0 < m \leq f'(x) \leq M$, sur quel intervalle choisir la constante α pour que g soit contractante sur I ? Quelle valeur de α choisir pour que $\sup_{x \in I} |g'(x)|$ soit le plus petit possible ?

c) Construire une méthode itérative de type point fixe pour approcher la valeur de $\sqrt{a}$ avec $a > 1$. On pourra prendre $f(x) = x^2 - a$ et $I = [1, a]$.

Exercice 3

Soit f une fonction lipschitzienne de rapport k sur I un fermé borné de $\mathbb{R}$. La fonction f vérifie également :

$$(f(x) - f(y)) \cdot (x - y) \leq 0, \ \forall x, y \in I.$$

On suppose que f possède un point fixe $\tilde{x}$ sur I.

a) Montrer que ce point fixe est unique.

b) Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^\star$, on définit la suite :

$$\begin{cases} x_0 \in I, \\ x_{n+1} = x_n + \alpha(f(x_n) - x_n) \ n \geq 0. \end{cases}$$

Si cette suite converge, quelle est sa limite ?

c) Montrer que $\forall \alpha \in]0, 1[$,

$$(x_{n+1} - \tilde{x})^2 \leq ((1 - \alpha)^2 + \alpha^2 k^2)(x_n - \tilde{x})^2.$$

d) A quel intervalle doit appartenir α pour que $(x_n)_n$ converge vers $\tilde{x}$? Quelle est la valeur optimale de α ?

Exercice 4

Soit ϕ une application de $[a, b]$ dans $[a, b]$. Supposons ϕ continue et qu'il existe un entier m tel que $\phi^m = \phi \, o \, \phi \, o \ldots \phi$ soit contractante.

a) Montrer que ϕ^m admet un unique point fixe $\tilde{x} \in [a, b]$.

b) Montrer que $\phi(\tilde{x})$ est égalemnt point fixe de ϕ^m. Conclure sur l'existence et l'unicité d'un point fixe de ϕ.

c) Montrer que pour tout point initial $x_0 \in [a, b]$, la suite $(x_n)_n$ définie par $x_{n+1} = \phi(x_n)$ converge vers $\tilde{x}$.

Exercice 5

a) Rappeler la construction de la méthode de Newton pour résoudre l'équation $f(x) = 0$.

b) Ecrire en pseudo-code l'algorithme de Newton pour calculer comme à l'exercice 2 la racine de a.