Exercice 1

a) Soit f une fonction de classe C^2. On souhaite approcher $I(f) = \int_0^h f(t)dt$ par la formule du point milieu. Calculer la partie principale de $I(f) - hf(h/2)$.

b) Soit f une fonction indéfiniment dérivable. On considère $I(f) = \int_0^h f(t)dt$ que l'on désire approcher par

$$J(f) = h\left(af(0) + bf(\frac{2h}{3})\right).$$

i. Déterminer a et b pour que la formule approchée de $J(f)$ soit d'ordre le plus élevé possible.

ii. Calculer en fonction de h la partie principale de $I(f) - J(f)$.

Exercice 2

Soit $\phi \in C^4([-1,1])$.

a) Calculer le polynôme d'Hermite de ϕ relatif aux points -1 et 1. On l'écrira sous la forme $H(t) = P(t) + Q(t)$ où P est le polynôme de Lagrange de ϕ relatif aux points -1 et 1, et Q un polynôme à déterminer.

b) En approchant ϕ par son polynôme d'Hermite en -1 et 1, retrouver la méthode d'intégration numérique élémentaire suivante :

$$\int_{-1}^{1} \phi(s)ds = \phi(-1) + \phi(1) + \frac{1}{3}(\phi'(-1) - \phi'(1)) + \frac{2}{45}\phi^{(4)}(\eta) \quad \text{avec } \eta \in]-1,1[.$$

c) En déduire la méthode d'intégration numérique composite :

$$\int_{\alpha}^{\beta} \phi(x)dx = T_k(\phi) + \frac{h^2}{12}(\phi'(\alpha) - \phi'(\beta)) + \frac{h^4}{720}(\beta - \alpha)\phi^{(4)}(\xi),$$

où $h = (\beta - \alpha)/n$, n entier ≥ 1, $\xi \in]\alpha, \beta[$ et $T_k(f)$ est la valeur obtenue par la méthode des trapèzes composée avec le pas h.

d) Comparer cette méthode à la méthode des trapèzes.

Exercice 3 Polynômes orthogonaux

a) Utiliser le procédé d'orthogonalisation de Schmidt pour trouver L_0, L_1, L_2 et L_3, les 4 premiers polynômes orthogonaux unitaires relativement au poids $w(x) = 1$ sur $[-1,1]$.

b) Ces polynômes sont dits de Legendre. On peut montrer la formule générale :

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n].$$

Vérifier que cette formule correspond à un coefficient multiplicatif près aux calculs faits précédemment pour $0 \leq n \leq 3$.

c) – Quel est le degré du polynôme L_n ?
– Que vaut la fonction $\frac{d^k}{dx^k}[(x^2-1)^n]$ en $x = \pm 1$ quand $k < n$?
– Vérifier que les polynômes de Legendre sont deux à deux orthogonaux.

d) Reprendre les questions **a)**, **b)** et **c)** avec le poids $w(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$. Les polynômes correspondants sont les polynômes de Tchebichev et valent :

$$t_n(x) = \cos(n \arccos(x)).$$

On pourra faire le changement de variable $\theta = \arccos(x)$.

Exercice 4 Intrégration de Gauss

a) Rappeler le principe des méthodes de Gauss.

b) Retrouver la méthode d'intégration de Gauss-Legendre d'ordre 3.