Université de Picardie Jules Verne | L2 math : Analyse Numérique
TD 4 : Interpolation de Hermite | Année 2007-2008

Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction dérivable que l'on souhaite interpoler sur $[a, b]$. On se propose ici de construire un polynôme qui comme le polynôme de Lagrange, coïncide avec f aux points d'interpolation mais en plus, on va demander aux dérivées de ce polynôme de coïncider avec les dérivées de f.

Exercice 1 : Existence et unicité

Soit $(x_j)_{0\leq j\leq n}$ des points distincts de $[a, b]$ et $(y_j)_{0\leq j\leq n}$ et $(z_j)_{0\leq j\leq n}$ des valeurs réelles. Le polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite, H_n, associé aux $n+1$ triplets de valeurs (x_j, y_j, z_j) est défini par

$$\forall j = 0, \ldots, n,\ \ H_n(x_j) = y_j \text{ et } H_n'(x_j) = z_j. \tag{1}$$

a) Quel est a priori le degré de H_n ?

b) On écrit H_n sous la forme

$$H_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i A_i(x) + \sum_{i=0}^{n} z_i B_i(x),$$

avec A_i et B_i des polynômes de degré au plus $2n + 1$ indépendants des valeurs y_j et z_j. Réecrire les conditions d'interpolation (1). En déduire des relations suffisantes sur A_i et B_i pour que H_n soit le polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite recherché.

c) Montrer que les polynômes A_i et B_i s'écrivent :

$$A_i(x) = \alpha_i(x)\ell_i^2(x), \quad B_i(x) = \beta_i(x)\ell_i^2(x)$$

où

$$\ell_i(x) = \prod_{k=0,k\neq i}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}.$$

On exprimera les deux polynômes α_i et β_i en fonction de $\ell_i(x)$ et de sa dérivée.

d) Démontrer qu'il existe un unique polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite H_n défini par (1).

Exercice 2 : Erreur d'interpolation

Soit f une fonction $\in C^{2n+2}([a, b])$ telle que $y_i = f(x_i)$ et $z_i = f'(x_i)$ pour $0 \leq i \leq n$. On considère H_n le polynôme de Lagrange-Hermite défini dans l'exercice précédent. On propose alors de calculer l'erreur d'interpolation $E(x) = f(x) - H_n(x)$.

a) Montrer que si une fonction $g \in C^{2n+2}([a, b])$ possède $n + 1$ racines doubles et une racine simple, alors il existe $\xi \in]a, b[$ tel que $g^{(2n+2)}(\xi) = 0$.

b) En introduisant pour $x \in [a, b]$ fixé $(x \neq x_i)$, $\varphi_x(y) = f(y) - H_n(y) - (f(x) - H_n(x)) \prod_{i=0}^{n} \frac{(y-x_i)^2}{(x-x_i)^2}$, montrer que

$$\forall x \in [a, b]\ \exists \xi_x \in]a, b[\colon E(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi_x)}{(2n + 2)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)^2.$$