Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur $[a,b]$ pour $n \geq 3$ et P_n le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points $x_0, x_1, \dots, x_n$ de $[a,b]$.

Le but de ce TD est de majorer l'expression de l'erreur $f(x) - P_n(x)$ pour plusieurs choix de $(x_i)_i$.

Exercice 1 : Points équidistants

a) Rappeler l'erreur que l'on commet en un point x de $[a,b]$ en approchant f par P_n.

b) On introduit la fonction $\pi_{n+1}(x) = (x - x_0) \dots (x - x_n)$. Montrer que si les points d'interpolation sont équidistants ($x_i = x_0 + ih$, $h = (b-a)/n$), alors

$$|\pi_{n+1}(x_0 + sh)| = h^{n+1}\phi(s) \quad \text{pour } s \text{ réel de } [0,n],$$

et où $\phi(s) = |s(s-1)\cdots(s-n)|$.

c) Montrer que ϕ est symétrique par rapport à $n/2$.

d) Montrer que $\phi(s-1) \geq \phi(s)$ pour tout $s \in [1, n/2]$.

e) Utiliser les questions **c)** et **d)** pour montrer que :

$$\max_{s\in[0,n]} \phi(s) = \max_{s\in[0,1]} \phi(s).$$

f) Montrer que $\max_{s\in[0,1]} \phi(s) \leq n!$.

g) En déduire une majoration de $\|\pi_{n+1}\| = \sup_{x\in[a,b]} |\pi_{n+1}(x)|$. En utilisant la formule de Sterling $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, montrer que pour $n \to +\infty$:

$$\|\pi_{n+1}\| \leq C \left(\frac{b-a}{e}\right)^{n+1},$$

où C est une constante positive.

Exercice 2 : Points de Tchebychev

a) Représenter la fonction $\arccos(x)$.

b) On définit T_n, $n \geq 0$, par :

$$T_n(u) = \cos(n \arccos u), \qquad u \in [-1,1].$$

Donner la relation de récurrence qui permet de calculer $T_{n+1}(u)$ à partir de $T_n(u)$ et $T_{n-1}(u)$.

c) Montrer que T_n définit un polynôme de degré n.

d) Calculer les racines $u_i \in [-1,1]$, $0 \leq i \leq n$ du polynôme T_{n+1}. Les u_i sont appelés les points d'interpolation de Tchebychev sur $[-1,1]$. On introduit $\tilde{\pi}_{n+1}(u) = \Pi_{i=0}^{n}(u - u_i)$.

e) Ecrire $\tilde{\pi}_{n+1}(u)$ en fonction de $T_{n+1}(u)$.

f) On travaille à présent de nouveau sur l'intervalle $[a, b]$. Les points d'interpolation de Tchebychev d'ordre n de $[a, b]$, notés x_i, sont définis comme les images des points u_i par la bijection affine $u \to x$ qui envoie -1 en a et +1 en b. Calculer les x_i.

g) Exprimer $\pi_{n+1}(x)$ en fonction de $T_{n+1}(u)$.

h) En déduire que

$$\|\pi_{n+1}\| = \sup_{x \in [a,b]} |\pi_{n+1}(x)| = 2 \left(\frac{b-a}{4} \right)^{n+1}.$$

i) Retour au problème d'interpolation polynômiale : comparer les erreurs commises par les deux choix de points (équidistants et Tchebychev). Quelle est la méthode d'interpolation préconisée ?