Exercice 1 : Déterminant de Vandermonde

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, une fonction continue. On se donne $n+2$ points $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$ dans $[a,b]$ deux à deux distincts et on note $P_{n+1}(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_{n+1}x^{n+1}$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de f en ces points.

a) Rappeler la définition du polynôme de Lagrange.

b) Montrer que les coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ de P_{n+1} sont donnés par la résolution du système linéaire $V_n\alpha = \beta$ où

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_{n+1} \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \dots \\ f(x_{n+1}) \end{pmatrix} \text{ et } V_n = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^{n+1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n+1} \\ \dots & & & & \dots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \dots & x_{n+1}^{n+1} \end{pmatrix}.$$

c) Montrer par récurrence que le déterminant de la matrice de Vandermonde V_n est donné par :

$$\det(V_n) = \prod_{0 \le j < i \le n+1} (x_i - x_j).$$

d) En déduire que le problème de l'interpolation de Lagrange admet une solution unique.

Exercice 2 : Polynôme d'interpolation de Lagrange

a) Rappeler l'expression du polynôme d'interpolation de Lagrange qui interpole une fonction f en $n+2$ points distincts.

b) Calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction $f(x) = \dfrac{2}{x+1} - 2^x$ aux points 0,1 et 2.

Exercice 3 : Différences divisées 1

Soient x_0, x_1, ..., x_{n+1} des réels d'un intervalle $[a,b]$ distincts deux à deux et f une fonction continue sur $[a,b]$.

a) Ecrire le polynôme de Lagrange sous la forme de Newton.

b) On se propose de redémontrer la relation de récurrence qui permet de calculer $f[x_0, \cdots, x_{n+1}]$ en fonction de $f[x_0, \cdots, x_n]$ et $f[x_1, \cdots, x_{n+1}]$.

i.) On introduit les points $z_0 = x_{n+1}$, $z_1 = x_n$, $\cdots$, $z_j = x_{n+1-j}$, $\cdots$, $z_{n+1} = x_0$. Ecrire le polynôme de Lagrange de f relatif aux points $(z_j)_j$ puis aux points $(x_j)_j$.

ii.) Identifier les termes de plus haut degré de ces polynômes et en déduire que la différence divisée $f[x_0, \cdots, x_{n+1}]$ ne dépend pas de l'ordre des points.

iii.) Identifier le deuxième terme de plus haut degré pour montrer la relation de récurrence souhaitée.

c) Recalculer le polynôme de Lagrange de l'exercice 2 en utilisant cette fois la méthode des différences divisées.

Exercice 4 : Différences divisées 2

Soit $(x_i)_{i\in\{0,\cdots,n+1\}}$, $n+2$ réels distincts deux à deux, $(y_i)_{i\in\{0,\cdots,n\}}$ $n+1$ réels distincts deux à deux et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞.

a) On définit g par $g(x) = f[x_0, \cdots, x_k, x]$. Établir par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$g[y_0, \cdots, y_n] = f[x_0, \cdots, x_k, y_0, \cdots, y_n].$$

b) On considère $n+1$ suites $(x_0^{(k)})_k, \cdots, (x_n^{(k)})_k$ telles que $\lim_{k\to+\infty} x_i^{(k)} = y_i$, $i = 0, \cdots, n$ et telles que pour un k donné les $x_i^{(k)}$ sont distincts deux à deux.

Montrer que

$$\lim_{k\to+\infty} f[x_0^{(k)}, \cdots, x_n^{(k)}] = f[y_0, \cdots, y_n].$$