Université de Picardie Jules Verne — L2 math : Analyse Numérique

TD 1 : Rappels autour du théorème de Rolle — Année 2007-2008.

Exercice 1

Enoncer le théorème des accroissements finis et le théorème de Rolle. Faire un dessin pour illustrer ces théorèmes.

Exercice 2

Soit f une fonction de classe C^1 telle que $f(0) = f'(0) = 0$. On suppose qu'il existe un $a \in \mathbb{R}^\star$ tel que $f(a) = 0$. Soit Γ la courbe représentative de f.

a) Calculer l'équation de la tangente à Γ en un point M quelconque.

b) Soit g la fonction telle que $g(x) = f(x)/x$ pour $x \neq 0$. Prolonger par continuité g en 0.

c) Montrer qu'il existe un point M de Γ (différent de 0) tel que la tangente en M à Γ passe par l'origine. On utilisera la fonction g et l'un des théorèmes de l'exercice 1.

Exercice 3

Soit f une fonction n fois dérivable ($n \geq 1$) sur l'intervalle $I = [a, b]$. Montrer par récurrence que si f s'annule en $n + 1$ points de I alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Exercice 4

On veut évaluer l'erreur commise quand on approche une fonction f de classe C^2 sur $[a, b]$ par une fonction affine. Soit g la fonction affine telle que $g(a) = f(a)$ et $g(b) = f(b)$.

a) Faire un dessin.

b) Soit $x \in]a, b[$ fixé. Choisir k_x telle que la fonction $\phi_x(t) = f(t) - g(t) - k_x(t - a)(t - b)$ s'annule en x *i.e.* $\phi_x(x) = 0$.

c) Utiliser la fonction ϕ_x pour montrer que pour tout x de $[a, b]$ il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{2} f''(c)(x - a)(x - b).$$

d) Soit $M_2 = \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|$. Justifier l'existence de M_2 et montrer que pour tout x de $[a, b]$ on a :

$$|f(x) - g(x)| \leq \frac{1}{2} |(x - a)(x - b)|M_2.$$

e) En déduire que pour tout x de $[a, b]$ on a $|f(x) - g(x)| \leq \frac{(b-a)^2}{8} M_2$.

f) En utilisant cette dernière estimation, majorer la quantité $\sup_{x\in[0,\pi]} |f(x) - g(x)|$ qui représente l'erreur commise quand on approche $f(x) = \cos(x)$ sur $[0, \pi]$ par une fonction affine.

g) On décompose à présent l'intervalle $[a, b]$ en N intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ pour $0 \leq i \leq N - 1$ avec $x_i = a+ih$, $h = (b-a)/(N-1)$. Majorer l'erreur commise sur $[a, b]$ si l'on approche la fonction f par une fonction affine par morceaux. Expliciter cette majoration pour l'exemple de la question précédente.