Le notations utilisées ici sont celles du cours.

**Exercice 1: Gradient conjugué**

On suppose que l'étape $k$ du gradient conjugué a déjà été calculée. i.e. on a $(X^0, \cdots, X^k)$, $(r^0, \cdots, r^k)$, $(d^0, \cdots, d^k)$. Cherchons à construire l'étape $k+1$:

$$X^{k+1} = X^k + \gamma^k d^k.$$

**a)** Calculer $\gamma^k$ tel que $r^{k+1}$ et $r^k$ soient orthogonaux. On peut alors calculer $X^{k+1}$ et $r^{k+1}$.

**b)** Soit $j \in \mathbb{N}$. Que vaut le plus petit $j_0 \in \mathbb{N}$ tel que $Ad^j \in K_{j_0}$?

**c)** En déduire que

$$(Ad^j, r^{k+1}) = \quad 0 \text{ pour } j < k.$$

**d)** La direction de descente s'écrit $d^{k+1} = r^{k+1} + \sum_{i=0}^{k} \zeta^i d^i$. Calculer les $\zeta^i$ tels que $(d^{k+1}, Ad^j) = 0$ pour $j \leq k$.

**e)** Ecrire l'algorithme du gradient conjugué.

**Exercice 2: Gradient conjugué préconditionné**

Soient $A$ et $C$ deux matrices symétriques définies positives. On pose $Y = C^{1/2}X$ et $\tilde{b} = C^{-1/2}b$.

**a)** Ecrire la méthode du gradient conjugué pour la résolution de $\tilde{A}Y = \tilde{b}$ où $\tilde{A} = C^{-1/2}AC^{-1/2}$. On notera $\tilde{r}^k$, $\tilde{d}^k$ les résidus et directions de descente pour ce nouveau système.

**b)** Calculer $\tilde{r}^k$ en fonction de $r^k = b - AX^k$ où $X^k = C^{-1/2}Y^k$.

**c)** Exprimer $\tilde{d}^k$ en fonction de $d^k$, la direction de descente pour la variable $X$, i.e. telle que $X^{k+1} = X^k + \gamma^k d^k$.

**d)** Exprimer $\gamma^k$ en fonction de $C^{-1}$, $r^k$ et $d^k$.

**e)** Exprimer $\zeta^k$ en fonction de $C^{-1}$, $r^{k+1}$ et $d^k$.

**f)** Ecrire l'algorithme du gradient conjugué préconditionné.

**Exercice 3: Conditionnement de la matrice du Laplacien 1D**

On considère la matrice d'ordre $n$ :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

où $\alpha$ et $\beta$ sont deux réels non nuls.

Le but de l'exercice est de trouver les éléments propres de $A$.

**a)** Soit $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $AX = \lambda X$. Ecrire la relation de récurrence que vérifient les composantes $X_i$ de $X$. On posera pour simplifier $X_0 = X_{n+1} = 0$.

**b)** Ecrire le polynôme caractéristique de cette relation de récurrence. Montrer que le discriminant ne peut être ni positif ni nul et que les racines sont de module 1.

**c)** Résoudre cette relation de récurrence.

**d)** Trouver à présent les valeurs propres de $A$.

**e)** Application : donner le comportement de $K_2(A)$, le conditionnement de la matrice du Laplacien discret 1D, quand le pas de maillage tend vers 0.