

Sur la conjecture de liberté des algèbres de Hecke cyclotomiques.

Ivan Marin

LAMFA

Université de Picardie-Jules Verne

Séminaire d'Algèbre, IHP le 22 avril 2013

Exemple de base.

Exemple de base.

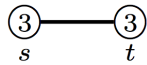
G_4 : le plus petit groupe de réflexion complexe exceptionnel.

Exemple de base.

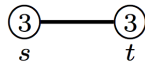
G_4 : le plus petit groupe de réflexion complexe exceptionnel.

Comme groupe fini, $Q_8 \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \simeq \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$.

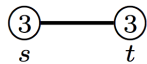
G_4



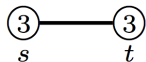
G_4



B

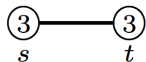
G_4 

$$B = \langle s, t \mid sts = tst \rangle$$

G_4 

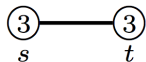
$$W = \langle s, t \mid sts = tst, s^3 = t^3 = 1 \rangle$$

$$H = \langle s, t \mid sts = tst, \begin{matrix} s^3 = as^2 + bs + c \\ t^3 = at^2 + bt + c \end{matrix} \rangle$$

G_4 

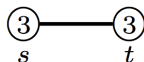
$$W = \langle s, t \mid sts = tst, s^3 = t^3 = 1 \rangle$$

$$H = \langle s, t \mid sts = tst, \begin{matrix} s^3 = as^2 + bs + c \\ t^3 = at^2 + bt + c \end{matrix} \rangle$$

G_4 

$$W = \langle s, t \mid sts = tst, s^3 = t^3 = 1 \rangle$$

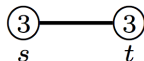
$$H = \langle s, t \mid sts = tst, \begin{matrix} s^3 = as^2 + bs + c \\ t^3 = at^2 + bt + c \end{matrix} \rangle$$

G_4 

$$W = \langle s, t \mid sts = tst, s^3 = t^3 = 1 \rangle$$

$$H = \langle s, t \mid sts = tst, \begin{matrix} s^3 = as^2 + bs + c \\ t^3 = at^2 + bt + c \end{matrix} \rangle$$

On va montrer qu'il y a de la torsion dans la $\mathbb{Z}[c]$ -algèbre obtenue via $a = b = 0$:

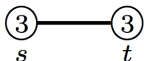
G_4 

$$W = \langle s, t \mid sts = tst, s^3 = t^3 = 1 \rangle$$

$$H = \langle s, t \mid sts = tst, \begin{matrix} s^3 = as^2 + bs + c \\ t^3 = at^2 + bt + c \end{matrix} \rangle$$

On va montrer qu'il y a de la torsion dans la $\mathbb{Z}[c]$ -algèbre obtenue via $a = b = 0$:

$$H_0 = \langle s_1, s_2 \mid s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2, s_1^3 = s_2^3 = c \rangle$$

G_4 

$$W = \langle s, t \mid sts = tst, s^3 = t^3 = 1 \rangle$$

$$H = \langle s, t \mid sts = tst, \begin{matrix} s^3 = as^2 + bs + c \\ t^3 = at^2 + bt + c \end{matrix} \rangle$$

On va montrer qu'il y a de la torsion dans la $\mathbb{Z}[c]$ -algèbre obtenue via $a = b = 0$:

$$H_0 = \langle s_1, s_2 \mid s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2, s_1^3 = s_2^3 = c \rangle$$

$\rightsquigarrow$ première obstruction à ce que H soit libre de rang fini sur $\mathbb{Z}[a, b, c]$.

$$c(s_1^2 s_2^2)^6 = cs_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2$$

$$\begin{aligned}
 c(s_1^2 s_2^2)^6 &= c s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
 &= s_1 c s_1 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c(s_1^2 s_2^2)^6 &= c s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 c s_1 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 s_2^3 s_1 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c(s_1^2 s_2^2)^6 &= cs_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 cs_1 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 s_2^3 s_1 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 s_2^2 (s_2 s_1 s_2) s_2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c(s_1^2 s_2^2)^6 &= c s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 c s_1 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 s_2^3 s_1 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 s_2^2 (s_2 s_1 s_2) s_2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 s_2^2 s_1 (s_2 s_1 s_2) s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c(s_1^2 s_2^2)^6 &= c s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 c s_1 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 s_2^3 s_1 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 s_2^2 (s_2 s_1 s_2) s_2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 s_2^2 s_1 (s_2 s_1 s_2) s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 s_2^2 s_1 s_1 s_2 (s_1 s_1^2) s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c(s_1^2 s_2^2)^6 &= c s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 c s_1 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 s_2^3 s_1 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 s_2^2 (s_2 s_1 s_2) s_2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 s_2^2 s_1 (s_2 s_1 s_2) s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 s_2^2 s_1 s_1 s_2 (s_1 s_1^2) s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c s_1 s_2^2 s_1 s_1 (s_2 s_2^2) s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c(s_1^2 s_2^2)^6 &= c s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 c s_1 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 s_2^3 s_1 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 s_2^2 (s_2 s_1 s_2) s_2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 s_2^2 s_1 (s_2 s_1 s_2) s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 s_2^2 s_1 s_1 s_2 (s_1 s_1^2) s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c s_1 s_2^2 s_1 s_1 (s_2 s_2^2) s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^2 s_1 s_2^2 s_1 (s_1 s_1^2) s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c(s_1^2 s_2^2)^6 &= c s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 c s_1 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 s_2^3 s_1 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 s_2^2 (s_2 s_1 s_2) s_2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 s_2^2 s_1 (s_2 s_1 s_2) s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 s_2^2 s_1 s_1 s_2 (s_1 s_1^2) s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c s_1 s_2^2 s_1 s_1 (s_2 s_2^2) s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^2 s_1 s_2^2 s_1 (s_1 s_1^2) s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^3 s_1 s_2^2 s_1 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c(s_1^2 s_2^2)^6 &= c s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 c s_1 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 s_2^3 s_1 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 s_2^2 (s_2 s_1 s_2) s_2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 s_2^2 s_1 (s_2 s_1 s_2) s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 s_2^2 s_1 s_1 s_2 (s_1 s_1^2) s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c s_1 s_2^2 s_1 s_1 (s_2 s_2^2) s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^2 s_1 s_2^2 s_1 (s_1 s_1^2) s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^3 s_1 s_2^2 s_1 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^3 s_1 s_2 (s_2 s_1 s_2) s_2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c(s_1^2 s_2^2)^6 &= c s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 c s_1 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 s_2^3 s_1 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 s_2^2 (s_2 s_1 s_2) s_2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 s_2^2 s_1 (s_2 s_1 s_2) s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 s_2^2 s_1 s_1 s_2 (s_1 s_1^2) s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c s_1 s_2^2 s_1 s_1 (s_2 s_2^2) s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^2 s_1 s_2^2 s_1 (s_1 s_1^2) s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^3 s_1 s_2^2 s_1 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^3 s_1 s_2 (s_2 s_1 s_2) s_2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^3 s_1 s_2 s_1 (s_2 s_1 s_2) s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c(s_1^2 s_2^2)^6 &= c s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 c s_1 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 s_2^3 s_1 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 s_2^2 (s_2 s_1 s_2) s_2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 s_2^2 s_1 (s_2 s_1 s_2) s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 s_2^2 s_1 s_1 s_2 (s_1 s_1^2) s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c s_1 s_2^2 s_1 s_1 (s_2 s_2^2) s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^2 s_1 s_2^2 s_1 (s_1 s_1^2) s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^3 s_1 s_2^2 s_1 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^3 s_1 s_2 (s_2 s_1 s_2) s_2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^3 s_1 s_2 s_1 (s_2 s_1 s_2) s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^3 s_1 s_2 s_1 s_1 s_2 (s_1 s_1^2) s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c(s_1^2 s_2^2)^6 &= c s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 c s_1 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 s_2^3 s_1 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 s_2^2 (s_2 s_1 s_2) s_2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 s_2^2 s_1 (s_2 s_1 s_2) s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 s_2^2 s_1 s_1 s_2 (s_1 s_1^2) s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c s_1 s_2^2 s_1 s_1 (s_2 s_2^2) s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^2 s_1 s_2^2 s_1 (s_1 s_1^2) s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^3 s_1 s_2^2 s_1 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^3 s_1 s_2 (s_2 s_1 s_2) s_2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^3 s_1 s_2 s_1 (s_2 s_1 s_2) s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^3 s_1 s_2 s_1 s_1 s_2 (s_1 s_1^2) s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^4 s_1 s_2 s_1 s_1 (s_2 s_2^2) s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c(s_1^2 s_2^2)^6 &= c s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 c s_1 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 s_2^3 s_1 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 s_2^2 (s_2 s_1 s_2) s_2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 s_2^2 s_1 (s_2 s_1 s_2) s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 s_2^2 s_1 s_1 s_2 (s_1 s_1^2) s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c s_1 s_2^2 s_1 s_1 (s_2 s_2^2) s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^2 s_1 s_2^2 s_1 (s_1 s_1^2) s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^3 s_1 s_2^2 s_1 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^3 s_1 s_2 (s_2 s_1 s_2) s_2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^3 s_1 s_2 s_1 (s_2 s_1 s_2) s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^3 s_1 s_2 s_1 s_1 s_2 (s_1 s_1^2) s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^4 s_1 s_2 s_1 s_1 (s_2 s_2^2) s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^5 s_1 s_2 s_1 (s_1 s_1^2) s_2^2 s_1^2 s_2^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c(s_1^2 s_2^2)^6 &= c s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 c s_1 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 s_2^3 s_1 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 s_2^2 (s_2 s_1 s_2) s_2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 s_2^2 s_1 (s_2 s_1 s_2) s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 s_2^2 s_1 s_1 s_2 (s_1 s_1^2) s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c s_1 s_2^2 s_1 s_1 (s_2 s_2^2) s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^2 s_1 s_2^2 s_1 (s_1 s_1^2) s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^3 s_1 s_2^2 s_1 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^3 s_1 s_2 (s_2 s_1 s_2) s_2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^3 s_1 s_2 s_1 (s_2 s_1 s_2) s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^3 s_1 s_2 s_1 s_1 s_2 (s_1 s_1^2) s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^4 s_1 s_2 s_1 s_1 (s_2 s_2^2) s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^5 s_1 s_2 s_1 (s_1 s_1^2) s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^6 (s_1 s_2 s_1) s_2^2 s_1^2 s_2^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c(s_1^2 s_2^2)^6 &= c s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 c s_1 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 s_2^3 s_1 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 s_2^2 (s_2 s_1 s_2) s_2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 s_2^2 s_1 (s_2 s_1 s_2) s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 s_2^2 s_1 s_1 s_2 (s_1 s_1^2) s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c s_1 s_2^2 s_1 s_1 (s_2 s_2^2) s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^2 s_1 s_2^2 s_1 (s_1 s_1^2) s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^3 s_1 s_2^2 s_1 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^3 s_1 s_2 (s_2 s_1 s_2) s_2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^3 s_1 s_2 s_1 (s_2 s_1 s_2) s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^3 s_1 s_2 s_1 s_1 s_2 (s_1 s_1^2) s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^4 s_1 s_2 s_1 s_1 (s_2 s_2^2) s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^5 s_1 s_2 s_1 (s_1 s_1^2) s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^6 (s_1 s_2 s_1) s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^6 s_2 s_1 (s_2 s_2^2) s_1^2 s_2^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c(s_1^2 s_2^2)^6 &= c s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 c s_1 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 s_2^3 s_1 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 s_2^2 (s_2 s_1 s_2) s_2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 s_2^2 s_1 (s_2 s_1 s_2) s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 s_2^2 s_1 s_1 s_2 (s_1 s_1^2) s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c s_1 s_2^2 s_1 s_1 (s_2 s_2^2) s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^2 s_1 s_2^2 s_1 (s_1 s_1^2) s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^3 s_1 s_2^2 s_1 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^3 s_1 s_2 (s_2 s_1 s_2) s_2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^3 s_1 s_2 s_1 (s_2 s_1 s_2) s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^3 s_1 s_2 s_1 s_1 s_2 (s_1 s_1^2) s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^4 s_1 s_2 s_1 s_1 (s_2 s_2^2) s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^5 s_1 s_2 s_1 (s_1 s_1^2) s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^6 (s_1 s_2 s_1) s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^6 s_2 s_1 (s_2 s_2^2) s_1^2 s_2^2 \\
&= c^7 s_2 (s_1 s_1^2) s_2^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c(s_1^2 s_2^2)^6 &= c s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 c s_1 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 s_2^3 s_1 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 s_2^2 (s_2 s_1 s_2) s_2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 s_2^2 s_1 (s_2 s_1 s_2) s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 s_2^2 s_1 s_1 s_2 (s_1 s_1^2) s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c s_1 s_2^2 s_1 s_1 (s_2 s_2^2) s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^2 s_1 s_2^2 s_1 (s_1 s_1^2) s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^3 s_1 s_2^2 s_1 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^3 s_1 s_2 (s_2 s_1 s_2) s_2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^3 s_1 s_2 s_1 (s_2 s_1 s_2) s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^3 s_1 s_2 s_1 s_1 s_2 (s_1 s_1^2) s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^4 s_1 s_2 s_1 s_1 (s_2 s_2^2) s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^5 s_1 s_2 s_1 (s_1 s_1^2) s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^6 (s_1 s_2 s_1) s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^6 s_2 s_1 (s_2 s_2^2) s_1^2 s_2^2 \\
&= c^7 s_2 (s_1 s_1^2) s_2^2 \\
&= c^8 s_2 s_2^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c(s_1^2 s_2^2)^6 &= c s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 c s_1 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 s_2^3 s_1 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 s_2^2 (s_2 s_1 s_2) s_2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 s_2^2 s_1 (s_2 s_1 s_2) s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= s_1 s_2^2 s_1 s_1 s_2 (s_1 s_1^2) s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c s_1 s_2^2 s_1 s_1 (s_2 s_2^2) s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^2 s_1 s_2^2 s_1 (s_1 s_1^2) s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^3 s_1 s_2^2 s_1 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^3 s_1 s_2 (s_2 s_1 s_2) s_2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^3 s_1 s_2 s_1 (s_2 s_1 s_2) s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^3 s_1 s_2 s_1 s_1 s_2 (s_1 s_1^2) s_2^2 s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^4 s_1 s_2 s_1 s_1 (s_2 s_2^2) s_1^2 s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^5 s_1 s_2 s_1 (s_1 s_1^2) s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^6 (s_1 s_2 s_1) s_2^2 s_1^2 s_2^2 \\
&= c^6 s_2 s_1 (s_2 s_2^2) s_1^2 s_2^2 \\
&= c^7 s_2 (s_1 s_1^2) s_2^2 \\
&= c^8 s_2 s_2^2 \\
&= c^9
\end{aligned}$$

Donc $c((s_1^2 s_2^2)^6 - c^8) = 0$.

Donc $c((s_1^2 s_2^2)^6 - c^8) = 0$.

Proposition

$$(s_1^2 s_2^2)^6 \neq c^8$$

Donc $c((s_1^2 s_2^2)^6 - c^8) = 0$.

Proposition

$$(s_1^2 s_2^2)^6 \neq c^8$$

Démonstration.

On considère la $\mathbb{Z}$ -algèbre H_{00} obtenue en faisant $a = b = c = 0$.

Donc $c((s_1^2 s_2^2)^6 - c^8) = 0$.

Proposition

$$(s_1^2 s_2^2)^6 \neq c^8$$

Démonstration.

On considère la $\mathbb{Z}$ -algèbre H_{00} obtenue en faisant $a = b = c = 0$.
On construit un H_{00} -module $\mathcal{E}$ sur lequel l'action de $(s_1^2 s_2^2)^6$ est non nulle.

Donc $c((s_1^2 s_2^2)^6 - c^8) = 0$.

Proposition

$$(s_1^2 s_2^2)^6 \neq c^8$$

Démonstration.

On considère la $\mathbb{Z}$ -algèbre H_{00} obtenue en faisant $a = b = c = 0$.
On construit un H_{00} -module $\mathcal{E}$ sur lequel l'action de $(s_1^2 s_2^2)^6$ est non nulle. □

Construction de $\mathcal{E}$:

Construction de $\mathcal{E}$:

On introduit les $\mathbb{Z}$ -modules libres suivants

Construction de $\mathcal{E}$:

On introduit les $\mathbb{Z}$ -modules libres suivants

$$\mathcal{W} = \langle w_1, w_2, w_3, \dots \rangle$$

$$\mathcal{W}' = \langle w'_1, w'_2, w'_3, \dots \rangle$$

$$\mathcal{Y} = \langle y_1, y_2, y_3, \dots \rangle$$

$$\mathcal{Y}' = \langle y'_1, y'_2, y'_3, \dots \rangle$$

$$\mathcal{E} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{W}' \oplus \mathcal{Y} \oplus \mathcal{Y}'$$

Construction de $\mathcal{E}$:

On introduit les $\mathbb{Z}$ -modules libres suivants

$$\mathcal{W} = \langle w_1, w_2, w_3, \dots \rangle$$

$$\mathcal{W}' = \langle w'_1, w'_2, w'_3, \dots \rangle$$

$$\mathcal{Y} = \langle y_1, y_2, y_3, \dots \rangle$$

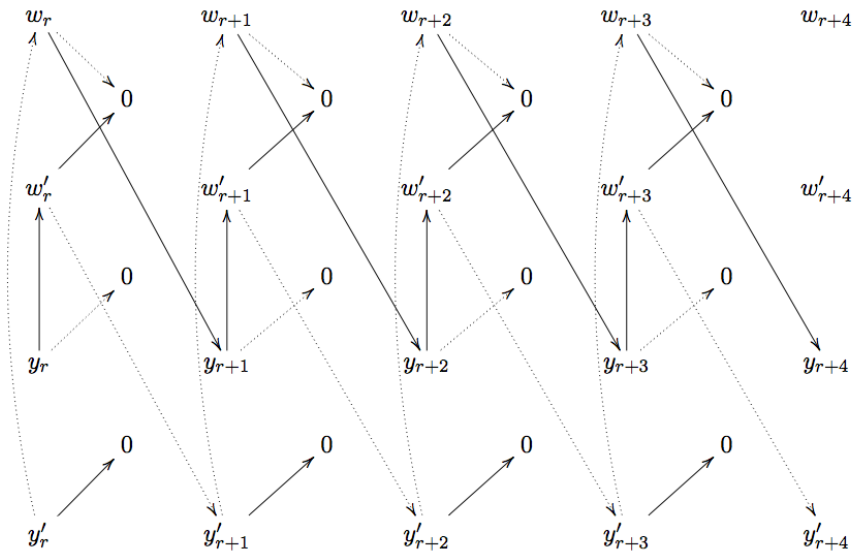
$$\mathcal{Y}' = \langle y'_1, y'_2, y'_3, \dots \rangle$$

$$\mathcal{E} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{W}' \oplus \mathcal{Y} \oplus \mathcal{Y}'$$

On définit $S_1, S_2 \in \text{End}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{E})$ par

$$\begin{cases} S_1 \cdot w_r = 0 \\ S_2 \cdot w_r = y_{r+1} \end{cases} \quad \begin{cases} S_1 \cdot y_r = 0 \\ S_2 \cdot y_r = w'_r \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_1 \cdot w'_r = y'_{r+1} \\ S_2 \cdot w'_r = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} S_1 \cdot y'_r = w_r \\ S_2 \cdot y'_r = 0 \end{cases}$$



On vérifie :

$$S_1 S_2 S_1 = S_2 S_1 S_2 = S_1^3 = S_2^3 = 0$$

et que $S_1^2 S_2^2 . w_r = w_{r+2}$ for all $r \geq 1$.

Cela montre que $\mathcal{E}$ est bien un H_{00} -module, sur lequel l'action de $(s_1^2 s_2^2)^6$ est non nulle.

De plus, si H_{00} était finiment engendré comme $\mathbb{Z}$ -module, alors $H_{00} . w_1$ le serait également, ce qui n'est pas vrai.

Il faut donc absolument que c soit inversible.

Par miracle, c'est suffisant. . .

Sur $R = \mathbb{Z}[a, b, c, c^{-1}]$:

Sur $R = \mathbb{Z}[a, b, c, c^{-1}]$:

Soit $u_i = R + Rs_i + Rs_i^2 = R + Rs_i + Rs_i^{-1}$.

Sur $R = \mathbb{Z}[a, b, c, c^{-1}]$:

Soit $u_i = R + Rs_i + Rs_i^2 = R + Rs_i + Rs_i^{-1}$.

En utilisant

$$s_2^{-1}s_1s_2^{-1} \in c^{-1}s_1.s_2s_1^{-1}s_2 + u_1u_2u_1$$

Sur $R = \mathbb{Z}[a, b, c, c^{-1}]$:

Soit $u_i = R + Rs_i + Rs_i^2 = R + Rs_i + Rs_i^{-1}$.

En utilisant

$$s_2^{-1}s_1s_2^{-1} \in c^{-1}s_1.s_2s_1^{-1}s_2 + u_1u_2u_1$$

on montre que

$$H = u_1u_2u_1 + u_1s_2s_1^{-1}s_2 = u_1u_2u_1 + u_1s_2s_1^2s_2$$

Sur $R = \mathbb{Z}[a, b, c, c^{-1}]$:

Soit $u_i = R + Rs_i + Rs_i^2 = R + Rs_i + Rs_i^{-1}$.

En utilisant

$$s_2^{-1}s_1s_2^{-1} \in c^{-1}s_1.s_2s_1^{-1}s_2 + u_1u_2u_1$$

on montre que

$$H = u_1u_2u_1 + u_1s_2s_1^{-1}s_2 = u_1u_2u_1 + u_1s_2s_1^2s_2$$

($s_2s_1^2s_2$ commute à s_1)

Sur $R = \mathbb{Z}[a, b, c, c^{-1}]$:

Soit $u_i = R + Rs_i + Rs_i^2 = R + Rs_i + Rs_i^{-1}$.

En utilisant

$$s_2^{-1}s_1s_2^{-1} \in c^{-1}s_1.s_2s_1^{-1}s_2 + u_1u_2u_1$$

on montre que

$$H = u_1u_2u_1 + u_1s_2s_1^{-1}s_2 = u_1u_2u_1 + u_1s_2s_1^2s_2$$

($s_2s_1^2s_2$ commute à s_1)

Cela permet de montrer que H est engendré comme u_1 -module par 8 éléments

Sur $R = \mathbb{Z}[a, b, c, c^{-1}]$:

Soit $u_i = R + Rs_i + Rs_i^2 = R + Rs_i + Rs_i^{-1}$.

En utilisant

$$s_2^{-1}s_1s_2^{-1} \in c^{-1}s_1.s_2s_1^{-1}s_2 + u_1u_2u_1$$

on montre que

$$H = u_1u_2u_1 + u_1s_2s_1^{-1}s_2 = u_1u_2u_1 + u_1s_2s_1^2s_2$$

($s_2s_1^2s_2$ commute à s_1)

Cela permet de montrer que H est engendré comme u_1 -module par 8 éléments

(1, les $s_2^\alpha s_1^\beta$, et $s_2s_1^{-1}s_2$)

Sur $R = \mathbb{Z}[a, b, c, c^{-1}]$:

Soit $u_i = R + Rs_i + Rs_i^2 = R + Rs_i + Rs_i^{-1}$.

En utilisant

$$s_2^{-1}s_1s_2^{-1} \in c^{-1}s_1.s_2s_1^{-1}s_2 + u_1u_2u_1$$

on montre que

$$H = u_1u_2u_1 + u_1s_2s_1^{-1}s_2 = u_1u_2u_1 + u_1s_2s_1^2s_2$$

($s_2s_1^2s_2$ commute à s_1)

Cela permet de montrer que H est engendré comme u_1 -module par 8 éléments

(1, les $s_2^\alpha s_1^\beta$, et $s_2s_1^{-1}s_2$)

donc comme R -module par $8 \times 3 = 24$ éléments.

Etat de l'art.

Classification des groupes de réflexions complexes irréductibles

Classification des groupes de réflexions complexes irréductibles

Il y a une série infinie de groupes de matrices monomiales, les

$G(de, e, n)$, $d, e, n \geq 1$. Dans ce cas la conjecture est connue par Ariki et Ariki-Koike (1994).

Classification des groupes de réflexions complexes irréductibles

Il y a une série infinie de groupes de matrices monomiales, les $G(de, e, n)$, $d, e, n \geq 1$. Dans ce cas la conjecture est connue par Ariki et Ariki-Koike (1994).

Les cas restant sont en nombre fini. Il s'agit de 34 groupes exceptionnels, dont 6 groupes de Coxeter. Il en reste 28.

Ils se partagent en

Classification des groupes de réflexions complexes irréductibles

Il y a une série infinie de groupes de matrices monomiales, les $G(de, e, n)$, $d, e, n \geq 1$. Dans ce cas la conjecture est connue par Ariki et Ariki-Koike (1994).

Les cas restant sont en nombre fini. Il s'agit de 34 groupes exceptionnels, dont 6 groupes de Coxeter. Il en reste 28.

Ils se partagent en **petits groupes**

Classification des groupes de réflexions complexes irréductibles

Il y a une série infinie de groupes de matrices monomiales, les $G(de, e, n)$, $d, e, n \geq 1$. Dans ce cas la conjecture est connue par Ariki et Ariki-Koike (1994).

Les cas restant sont en nombre fini. Il s'agit de 34 groupes exceptionnels, dont 6 groupes de Coxeter. Il en reste 28.

Ils se partagent en **petits groupes** (= groupes de rang 2)

Classification des groupes de réflexions complexes irréductibles

Il y a une série infinie de groupes de matrices monomiales, les $G(de, e, n)$, $d, e, n \geq 1$. Dans ce cas la conjecture est connue par Ariki et Ariki-Koike (1994).

Les cas restant sont en nombre fini. Il s'agit de 34 groupes exceptionnels, dont 6 groupes de Coxeter. Il en reste 28.

Ils se partagent en **petits groupes** (= groupes de rang 2) et **grands groupes**

Classification des groupes de réflexions complexes irréductibles

Il y a une série infinie de groupes de matrices monomiales, les $G(de, e, n)$, $d, e, n \geq 1$. Dans ce cas la conjecture est connue par Ariki et Ariki-Koike (1994).

Les cas restant sont en nombre fini. Il s'agit de 34 groupes exceptionnels, dont 6 groupes de Coxeter. Il en reste 28.

Ils se partagent en **petits groupes** (= groupes de rang 2) et **grands groupes** (de rang 3 à 6)

(pour $W < GL_n(\mathbb{C})$, n est appelé le rang de W)

Classification des groupes de réflexions complexes irréductibles

Il y a une série infinie de groupes de matrices monomiales, les $G(de, e, n)$, $d, e, n \geq 1$. Dans ce cas la conjecture est connue par Ariki et Ariki-Koike (1994).

Les cas restant sont en nombre fini. Il s'agit de 34 groupes exceptionnels, dont 6 groupes de Coxeter. Il en reste 28.

Ils se partagent en **petits groupes** (= groupes de rang 2) et **grands groupes** (de rang 3 à 6)

(pour $W < GL_n(\mathbb{C})$, n est appelé le rang de W)

Pour $n = 2$:

Classification des groupes de réflexions complexes irréductibles

Il y a une série infinie de groupes de matrices monomiales, les $G(de, e, n)$, $d, e, n \geq 1$. Dans ce cas la conjecture est connue par Ariki et Ariki-Koike (1994).

Les cas restant sont en nombre fini. Il s'agit de 34 groupes exceptionnels, dont 6 groupes de Coxeter. Il en reste 28.

Ils se partagent en **petits groupes** (= groupes de rang 2) et **grands groupes** (de rang 3 à 6)

(pour $W < GL_n(\mathbb{C})$, n est appelé le rang de W)

Pour $n = 2$:

On peut supposer $W < U_2$. Alors $\tilde{W} = \{\pm \sqrt{\det(w)}w; w \in W\}$ est un sous-groupe de SU_2 .

Classification des groupes de réflexions complexes irréductibles

Il y a une série infinie de groupes de matrices monomiales, les $G(d, e, n)$, $d, e, n \geq 1$. Dans ce cas la conjecture est connue par Ariki et Ariki-Koike (1994).

Les cas restant sont en nombre fini. Il s'agit de 34 groupes exceptionnels, dont 6 groupes de Coxeter. Il en reste 28.

Ils se partagent en **petits groupes** (= groupes de rang 2) et **grands groupes** (de rang 3 à 6)

(pour $W < GL_n(\mathbb{C})$, n est appelé le rang de W)

Pour $n = 2$:

On peut supposer $W < U_2$. Alors $\tilde{W} = \{\pm\sqrt{\det(w)}w; w \in W\}$ est un sous-groupe de SU_2 . Or

$$SU_2/Z(SU_2) = SU_2/\{\pm 1\} \simeq SO_3(\mathbb{R}).$$

Classification des groupes de réflexions complexes irréductibles

Il y a une série infinie de groupes de matrices monomiales, les $G(d, e, n)$, $d, e, n \geq 1$. Dans ce cas la conjecture est connue par Ariki et Ariki-Koike (1994).

Les cas restant sont en nombre fini. Il s'agit de 34 groupes exceptionnels, dont 6 groupes de Coxeter. Il en reste 28.

Ils se partagent en **petits groupes** (= groupes de rang 2) et **grands groupes** (de rang 3 à 6)

(pour $W < GL_n(\mathbb{C})$, n est appelé le rang de W)

Pour $n = 2$:

On peut supposer $W < U_2$. Alors $\tilde{W} = \{\pm \sqrt{\det(w)} w; w \in W\}$ est un sous-groupe de SU_2 . Or

$SU_2/Z(SU_2) = SU_2/\{\pm 1\} \simeq SO_3(\mathbb{R})$. Alors $G = \tilde{W}/Z(\tilde{W})$ est un sous-groupe fini de $SO_3(\mathbb{R})$ (qui est primitif, irréductible).

3 possibilités :

1. $G \simeq SO_3(\mathbb{R}) \cap W(A_3)$ Groupes $G_4, \dots, G_7$.
2. $G \simeq SO_3(\mathbb{R}) \cap W(B_3)$ Groupes $G_8, \dots, G_{15}$.
3. $G \simeq SO_3(\mathbb{R}) \cap W(H_3)$ Groupes $G_{16}, \dots, G_{22}$.

Parmi ceux-ci :

- ▶ $G_4 = \langle s, t, \mid sts = tst, s^3 = t^3 = 1 \rangle$
(Berceanu-Funar 1994, Broué-Malle 1994, M. 2011)
- ▶ $G_8 = \langle s, t, \mid sts = tst, s^4 = t^4 = 1 \rangle$ (Chavli 2012)
- ▶ $G_{16} = \langle s, t, \mid sts = tst, s^5 = t^5 = 1 \rangle$ (Chavli 2013)

$\frac{1}{2}$ -preuves : G_5, G_{12} (Broué-Malle 1994),

$\frac{1}{4}$ -preuve : presque tout, (J. Müller, date incertaine).

Difficulté particulière en rang 2 : grand nombre de paramètres !

Engendrement fini en rang 2 : Etingof-Rains

Engendrement fini en rang 2 : Etingof-Rains

Vers 2004, Etingof et Rains ont introduit de **nouvelles déformations** de l'algèbre de groupe d'un groupe de Coxeter.

Engendrement fini en rang 2 : Etingof-Rains

Vers 2004, Etingof et Rains ont introduit de **nouvelles déformations** de l'algèbre de groupe d'un groupe de Coxeter.

Engendrement fini en rang 2 : Etingof-Rains

Vers 2004, Etingof et Rains ont introduit de **nouvelles déformations** de l'algèbre de groupe d'un groupe de Coxeter.

$$RW = \langle s_1, \dots, s_n \mid (s_i s_j)^{m_{ij}} = 1, s_i^2 = 1 \rangle$$

Engendrement fini en rang 2 : Etingof-Rains

Vers 2004, Etingof et Rains ont introduit de **nouvelles déformations** de l'algèbre de groupe d'un groupe de Coxeter.

$$RW = \langle s_1, \dots, s_n \mid (s_i s_j)^{m_{ij}} = 1, s_i^2 = 1 \rangle$$

$$H = \langle s_1, \dots, s_n \mid \underbrace{s_i s_j s_i \dots}_{m_{ij}} = \underbrace{s_j s_i s_j \dots}_{m_{ij}}, (s_i - u)(s_i - v) = 0 \rangle$$

Engendrement fini en rang 2 : Etingof-Rains

Vers 2004, Etingof et Rains ont introduit de **nouvelles déformations** de l'algèbre de groupe d'un groupe de Coxeter.

$$RW = \langle s_1, \dots, s_n \mid (s_i s_j)^{m_{ij}} = 1, s_i^2 = 1 \rangle$$

$$H = \langle s_1, \dots, s_n \mid \underbrace{s_i s_j s_i \dots}_{m_{ij}} = \underbrace{s_j s_i s_j \dots}_{m_{ij}}, (s_i - u)(s_i - v) = 0 \rangle$$

$$E = \langle s_1, \dots, s_n \mid \prod_{k=1}^{m_{ij}} (s_i s_j - u_{ij,k}) = 0, s_i^2 = 1 \rangle$$

Engendrement fini en rang 2 : Etingof-Rains

Vers 2004, Etingof et Rains ont introduit de **nouvelles déformations** de l'algèbre de groupe d'un groupe de Coxeter.

$$RW = \langle s_1, \dots, s_n \mid (s_i s_j)^{m_{ij}} = 1, s_i^2 = 1 \rangle$$

$$H = \langle s_1, \dots, s_n \mid \underbrace{s_i s_j s_i \dots}_{m_{ij}} = \underbrace{s_j s_i s_j \dots}_{m_{ij}}, (s_i - u)(s_i - v) = 0 \rangle$$

$$E = \langle s_1, \dots, s_n \mid \prod_{k=1}^{m_{ij}} (s_i s_j - u_{ij,k}) = 0, s_i^2 = 1 \rangle$$

Proposition

E est finiment engendré comme $\mathbb{Z}[u_{ij,k}, u_{ij,k}^{-1}]$ -module.

Engendrement fini en rang 2 : Etingof-Rains

Vers 2004, Etingof et Rains ont introduit de **nouvelles déformations** de l'algèbre de groupe d'un groupe de Coxeter.

$$RW = \langle s_1, \dots, s_n \mid (s_i s_j)^{m_{ij}} = 1, s_i^2 = 1 \rangle$$

$$H = \langle s_1, \dots, s_n \mid \underbrace{s_i s_j s_i \dots}_{m_{ij}} = \underbrace{s_j s_i s_j \dots}_{m_{ij}}, (s_i - u)(s_i - v) = 0 \rangle$$

$$E = \langle s_1, \dots, s_n \mid \prod_{k=1}^{m_{ij}} (s_i s_j - u_{ij,k}) = 0, s_i^2 = 1 \rangle$$

Proposition

E est finiment engendré comme $\mathbb{Z}[u_{ij,k}, u_{ij,k}^{-1}]$ -module.

$W_0 = \text{Ker}(W \rightarrow \{\pm 1\})$ est engendré par les $g_{ij} = s_i s_j$.

Engendrement fini en rang 2 : Etingof-Rains

Vers 2004, Etingof et Rains ont introduit de **nouvelles déformations** de l'algèbre de groupe d'un groupe de Coxeter.

$$RW = \langle s_1, \dots, s_n \mid (s_i s_j)^{m_{ij}} = 1, s_i^2 = 1 \rangle$$

$$H = \langle s_1, \dots, s_n \mid \underbrace{s_i s_j s_i \dots}_{m_{ij}} = \underbrace{s_j s_i s_j \dots}_{m_{ij}}, (s_i - u)(s_i - v) = 0 \rangle$$

$$E = \langle s_1, \dots, s_n \mid \prod_{k=1}^{m_{ij}} (s_i s_j - u_{ij,k}) = 0, s_i^2 = 1 \rangle$$

Proposition

E est finiment engendré comme $\mathbb{Z}[u_{ij,k}, u_{ij,k}^{-1}]$ -module.

$W_0 = \text{Ker}(W \rightarrow \{\pm 1\})$ est engendré par les $g_{ij} = s_i s_j$.

Engendrement fini en rang 2 : Etingof-Rains

Vers 2004, Etingof et Rains ont introduit de **nouvelles déformations** de l'algèbre de groupe d'un groupe de Coxeter.

$$RW = \langle s_1, \dots, s_n \mid (s_i s_j)^{m_{ij}} = 1, s_i^2 = 1 \rangle$$

$$H = \langle s_1, \dots, s_n \mid \underbrace{s_i s_j s_i \dots}_{m_{ij}} = \underbrace{s_j s_i s_j \dots}_{m_{ij}}, (s_i - u)(s_i - v) = 0 \rangle$$

$$E = \langle s_1, \dots, s_n \mid \prod_{k=1}^{m_{ij}} (s_i s_j - u_{ij,k}) = 0, s_i^2 = 1 \rangle$$

Proposition

E est finiment engendré comme $\mathbb{Z}[u_{ij,k}, u_{ij,k}^{-1}]$ -module.

$W_0 = \text{Ker}(W \rightarrow \{\pm 1\})$ est engendré par les $g_{ij} = s_i s_j$.

$\Rightarrow E_0 = \langle s_i s_j; i, j \rangle \subset E$ est finiment engendré sur $\mathbb{Z}[u_{ij,k}, u_{ij,k}^{-1}]$

Engendrement fini en rang 2 : Etingof-Rains

Vers 2004, Etingof et Rains ont introduit de **nouvelles déformations** de l'algèbre de groupe d'un groupe de Coxeter.

$$RW = \langle s_1, \dots, s_n \mid (s_i s_j)^{m_{ij}} = 1, s_i^2 = 1 \rangle$$

$$H = \langle s_1, \dots, s_n \mid \underbrace{s_i s_j s_i \dots}_{m_{ij}} = \underbrace{s_j s_i s_j \dots}_{m_{ij}}, (s_i - u)(s_i - v) = 0 \rangle$$

$$E = \langle s_1, \dots, s_n \mid \prod_{k=1}^{m_{ij}} (s_i s_j - u_{ij,k}) = 0, s_i^2 = 1 \rangle$$

Proposition

E est finiment engendré comme $\mathbb{Z}[u_{ij,k}, u_{ij,k}^{-1}]$ -module.

$W_0 = \text{Ker}(W \rightarrow \{\pm 1\})$ est engendré par les $g_{ij} = s_i s_j$.

$\Rightarrow E_0 = \langle s_i s_j; i, j \rangle \subset E$ est finiment engendré sur $\mathbb{Z}[u_{ij,k}, u_{ij,k}^{-1}]$ et est une déformation de l'algèbre de groupe de W_0 .

Engendrement fini en rang 2 : Etingof-Rains

Rappel : si $G \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ est un groupe de réflexions complexes exceptionnel de rang 2, alors $G/Z(G) \simeq W_0 \subset W$ pour W un groupe de Coxeter fini de rang 3.

Engendrement fini en rang 2 : Etingof-Rains

Rappel : si $G \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ est un groupe de réflexions complexes exceptionnel de rang 2, alors $G/Z(G) \simeq W_0 \subset W$ pour W un groupe de Coxeter fini de rang 3.

Comme E_0 est finiment engendré comme module

Engendrement fini en rang 2 : Etingof-Rains

Rappel : si $G \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ est un groupe de réflexions complexes exceptionnel de rang 2, alors $G/Z(G) \simeq W_0 \subset W$ pour W un groupe de Coxeter fini de rang 3.

Comme E_0 est finiment engendré comme module

H est finiment engendré comme $\mathbb{Z}[u_i, u_i^{-1}, \textcolor{red}{z}, \textcolor{red}{z}^{-1}]$ -module,

Engendrement fini en rang 2 : Etingof-Rains

Rappel : si $G \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ est un groupe de réflexions complexes exceptionnel de rang 2, alors $G/Z(G) \simeq W_0 \subset W$ pour W un groupe de Coxeter fini de rang 3.

Comme E_0 est finiment engendré comme module

H est finiment engendré comme $\mathbb{Z}[u_i, u_i^{-1}, z, z^{-1}]$ -module, où z est l'action d'un générateur de $Z(B) \simeq \mathbb{Z}$, où B est le groupe de tresses de G .

Engendrement fini en rang 2 : Etingof-Rains

Rappel : si $G \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ est un groupe de réflexions complexes exceptionnel de rang 2, alors $G/Z(G) \simeq W_0 \subset W$ pour W un groupe de Coxeter fini de rang 3.

Comme E_0 est finiment engendré comme module

H est finiment engendré comme $\mathbb{Z}[u_i, u_i^{-1}, z, z^{-1}]$ -module, où z est l'action d'un générateur de $Z(B) \simeq \mathbb{Z}$, où B est le groupe de tresses de G .

Avec un peu plus de travail, on montre :

Engendrement fini en rang 2 : Etingof-Rains

Rappel : si $G \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ est un groupe de réflexions complexes exceptionnel de rang 2, alors $G/Z(G) \simeq W_0 \subset W$ pour W un groupe de Coxeter fini de rang 3.

Comme E_0 est finiment engendré comme module

H est finiment engendré comme $\mathbb{Z}[u_i, u_i^{-1}, z, z^{-1}]$ -module, où z est l'action d'un générateur de $Z(B) \simeq \mathbb{Z}$, où B est le groupe de tresses de G .

Avec un peu plus de travail, on montre : l'action de z on H est annulée par un polynôme unitaire sur R (de grand degré), donc H est **finiment engendrée** sur R .

Engendrement fini en rang 2 : Etingof-Rains

Rappel : si $G \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ est un groupe de réflexions complexes exceptionnel de rang 2, alors $G/Z(G) \simeq W_0 \subset W$ pour W un groupe de Coxeter fini de rang 3.

Comme E_0 est finiment engendré comme module

H est finiment engendré comme $\mathbb{Z}[u_i, u_i^{-1}, z, z^{-1}]$ -module, où z est l'action d'un générateur de $Z(B) \simeq \mathbb{Z}$, où B est le groupe de tresses de G .

Avec un peu plus de travail, on montre : l'action de z on H est annulée par un polynôme unitaire sur R (de grand degré), donc H est **finiment engendrée** sur R .

(Mais cette approche ne donne aucun contrôle sur le nombre d'éléments nécessaires pour engendrer H)

Cas de G_{25}

$A_4 = \langle s_1, s_2, s_3 \mid \dots, s_i^3 = as_i^2 + bs_i + c \rangle$ comme A_3 -bimodule,

$A_3 = \langle s_1, s_2 \rangle$.

Cas de G_{25}

$A_4 = \langle s_1, s_2, s_3 \mid \dots, s_i^3 = as_i^2 + bs_i + c \rangle$ comme A_3 -bimodule,
 $A_3 = \langle s_1, s_2 \rangle$.

Théorème

- ▶ $A_4 =$
 $A_3 + A_3 s_3 A_3 + A_3 s_3^{-1} A_3 + A_3 s_3 s_2^{-1} s_3 A_3 + A_3 w_0^{-1} A_3 + A_3 w_0 A_3$
- ▶ $A_4 = A_3 + A_3 s_3 A_3 + A_3 s_3^{-1} A_3 + A_3 s_3 s_2^{-1} s_3 A_3 + A_3 w_0^{-1} + A_3 w_0$

($w_0 = s_3 s_2 s_1^2 s_2 s_3$).

Cas de G_{25}

$A_4 = \langle s_1, s_2, s_3 \mid \dots, s_i^3 = as_i^2 + bs_i + c \rangle$ comme A_3 -bimodule,
 $A_3 = \langle s_1, s_2 \rangle$.

Théorème

- ▶ $A_4 =$
 $A_3 + A_3 s_3 A_3 + A_3 s_3^{-1} A_3 + A_3 s_3 s_2^{-1} s_3 A_3 + A_3 w_0^{-1} A_3 + A_3 w_0 A_3$
- ▶ $A_4 = A_3 + A_3 s_3 A_3 + A_3 s_3^{-1} A_3 + A_3 s_3 s_2^{-1} s_3 A_3 + A_3 w_0^{-1} + A_3 w_0$

($w_0 = s_3 s_2 s_1^2 s_2 s_3$). $\rightsquigarrow$ conjecture.

Cas de G_{25}

$A_4 = \langle s_1, s_2, s_3 \mid \dots, s_i^3 = as_i^2 + bs_i + c \rangle$ comme A_3 -bimodule,
 $A_3 = \langle s_1, s_2 \rangle$.

Théorème

- ▶ $A_4 =$
 $A_3 + A_3 s_3 A_3 + A_3 s_3^{-1} A_3 + A_3 s_3 s_2^{-1} s_3 A_3 + A_3 w_0^{-1} A_3 + A_3 w_0 A_3$
- ▶ $A_4 = A_3 + A_3 s_3 A_3 + A_3 s_3^{-1} A_3 + A_3 s_3 s_2^{-1} s_3 A_3 + A_3 w_0^{-1} + A_3 w_0$

($w_0 = s_3 s_2 s_1^2 s_2 s_3$). $\rightsquigarrow$ conjecture.

Autre démonstration : $A' = \langle s_1, s_3 \rangle \simeq R \oplus R$, $u_2 = \langle s_2 \rangle \simeq R$.

Cas de G_{25}

$A_4 = \langle s_1, s_2, s_3 \mid \dots, s_i^3 = as_i^2 + bs_i + c \rangle$ comme A_3 -bimodule,
 $A_3 = \langle s_1, s_2 \rangle$.

Théorème

- ▶ $A_4 =$
 $A_3 + A_3 s_3 A_3 + A_3 s_3^{-1} A_3 + A_3 s_3 s_2^{-1} s_3 A_3 + A_3 w_0^{-1} A_3 + A_3 w_0 A_3$
- ▶ $A_4 = A_3 + A_3 s_3 A_3 + A_3 s_3^{-1} A_3 + A_3 s_3 s_2^{-1} s_3 A_3 + A_3 w_0^{-1} + A_3 w_0$

($w_0 = s_3 s_2 s_1^2 s_2 s_3$). $\rightsquigarrow$ conjecture.

Autre démonstration : $A' = \langle s_1, s_3 \rangle \simeq R \oplus R$, $u_2 = \langle s_2 \rangle \simeq R$.

Proposition

$$A_4 = A' u_2 A' u_2 A' + A' x_+ + A' x_- + A' y_-$$

Cas de G_{25}

$A_4 = \langle s_1, s_2, s_3 \mid \dots, s_i^3 = as_i^2 + bs_i + c \rangle$ comme A_3 -bimodule,
 $A_3 = \langle s_1, s_2 \rangle$.

Théorème

- ▶ $A_4 =$
 $A_3 + A_3 s_3 A_3 + A_3 s_3^{-1} A_3 + A_3 s_3 s_2^{-1} s_3 A_3 + A_3 w_0^{-1} A_3 + A_3 w_0 A_3$
- ▶ $A_4 = A_3 + A_3 s_3 A_3 + A_3 s_3^{-1} A_3 + A_3 s_3 s_2^{-1} s_3 A_3 + A_3 w_0^{-1} + A_3 w_0$

($w_0 = s_3 s_2 s_1^2 s_2 s_3$). $\rightsquigarrow$ conjecture.

Autre démonstration : $A' = \langle s_1, s_3 \rangle \simeq R \oplus R$, $u_2 = \langle s_2 \rangle \simeq R$.

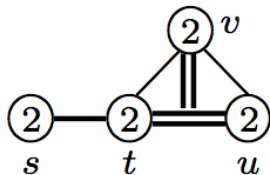
Proposition

$$A_4 = A' u_2 A' u_2 A' + A' x_+ + A' x_- + A' y_-$$

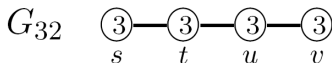
avec $x_+ = s_2 (s_1 s_3) s_2^{-1} (s_1 s_3) s_2$, $x_- = s_2^{-1} (s_1 s_3)^{-1} s_2 (s_1 s_3)^{-1} s_2^{-1}$
 $y_+ = s_2 (s_1 s_3)^{-1} s_2 (s_1 s_3)^{-1} s_2$, $y_- = s_2^{-1} (s_1 s_3) s_2^{-1} (s_1 s_3) s_2^{-1}$

Rang ≥ 4 : outre des groupes de Coxeter exceptionnels, il y a en 5 :

- ▶ $\sqrt{} G_{29} : R = \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$, ordre 7680 (Pfeiffer-M., 2013).



- ▶ $G_{31} : R = \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$, ordre 46080.
- ▶ $\sqrt{} G_{32}$, ordre 155520 (M. 2011)



- ▶ $G_{33} : R = \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$, ordre 51840.
- ▶ $G_{34} : R = \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$, ordre 39191040.

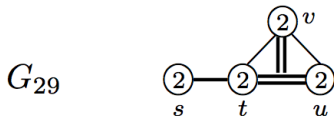
Pour G_{32} :

par induction, on a besoin des *deux* démonstrations pour G_{25} .

Pour

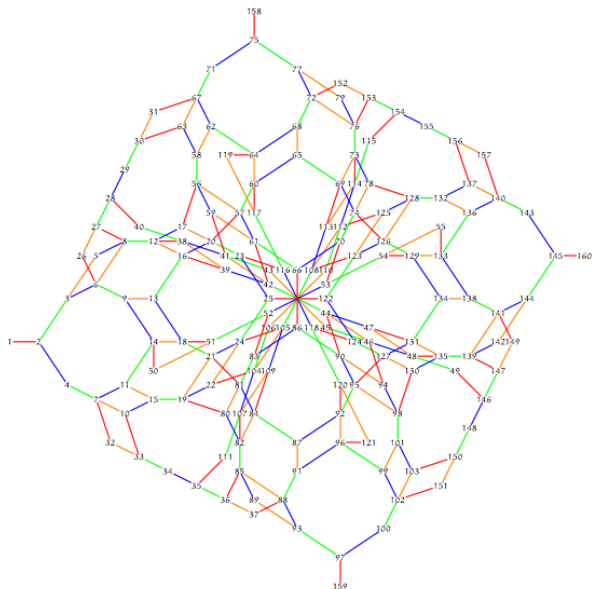
$$G_{29} = \langle s, t, u, v \mid \dots, v(tu)v(tu) = (tu)v(tu)v \rangle$$

on considère la sous-algèbre H_0 de l'algèbre de Hecke H engendrée par s, t, u , et W_0 le sous-groupe de W correspondant.



W/W_0 a 160 éléments, que l'on peut exprimer en 160 mots $x_1, \dots, x_{160}$ en $s, t, u, v = 1, 2, 3, 4$.

Le graphe de Cayley des cosets a la figure suivante.



Il faut ensuite vérifier que la multiplication **à droite** par les quatre générateurs laisse stable

$$\sum_{i=1}^{160} H_0.x_i$$

Il faut donc remplir 160×4 entrées de la forme suivante

x	$x.2$	$x.3$	$x.4$
$x_1 = \emptyset$	$2 \cdot x$	$3 \cdot x$	$\underline{x_2}$
$x_2 = 4$	$\underline{x_3}$	$\underline{x_4}$	$qx_1 + (q-1)x$
$x_3 = 42$	$qx_2 + (q-1)x$	$\underline{x_6}$	$2 \cdot x$
$x_4 = 43$	$\underline{x_7}$	$qx_2 + (q-1)x$	$3 \cdot x$
$x_6 = 423$	$\underline{x_9}$	$qx_3 + (q-1)x$	$\underline{x_{26}}$
$x_7 = 432$	$qx_4 + (q-1)x$	$\underline{x_{11}}$	$\underline{x_{32}}$
$x_9 = 4232$	$qx_6 + (q-1)x$	$\underline{x_{14}}$	(2.2)
$x_{11} = 4323$	x_{14}	$qx_7 + (q-1)x$	(2.5)
$x_{14} = 42323$	$qx_{11} + (q-1)x$	$qx_9 + (q-1)x$	$\underline{x_{50}}$
$x_{26} = 4234$	(2.8)	$2 \cdot x$	$qx_6 + (q-1)x$
$x_{32} = 4324$	$3 \cdot x$	$323' \cdot x$	$qx_7 + (q-1)x$
$x_{50} = 423234$	(2.11)	(2.12)	$qx_{14} + (q-1)x$

Exemple de calculs :

$$(2.43) \quad x_{54}.4 = \frac{1}{q}x_{129} - \frac{1}{q}(q-1)x_{127} - \frac{1}{q}(q-1)^2x_{90} + \frac{1}{q}(q-1)^3x_{87} - q(q-1)2'3'2 \cdot x_{44} - (q-1)^21 \cdot x_{36} \\ + (q-1)2'32 \cdot x_{83} + (q-1)^23231 \cdot x_{33} - (q-1)^232 \cdot x_{80} + ((q-1)^3323'1 + q(q-1)^22'32132'3') \cdot x_{34}$$

$$x_{54}.4 - (q-1)x_{51}.324 = q42323412'324 = q42323142'324 = q4232312'3242'32 \\ = (x_{122} - q(q-1)x_{39} - (q-1)^2x_{81}).2'32$$

$$x_{51}.324 \stackrel{(2.18)}{=} 2'32 \cdot x_{83} + (q-1)3231 \cdot x_{33} - (q-1)32 \cdot x_{80} + (q-1)^2(323' - 2'32)1 \cdot x_{34} \\ qx_{122}.2'32 = x_{122}.232 - (q-1)x_{122}.32 = x_{129} - (q-1)x_{127}$$

$$qx_{39}.2'32 = x_{39}.232 - (q-1)x_{39}.32 \stackrel{(2.34)}{=} q2'3'2 \cdot x_{44} + (q-1)1 \cdot x_{36} - (q-1)2'321323' \cdot x_{34} \\ qx_{81}.2'32 = x_{81}.232 - (q-1)x_{81}.32 = x_{90} - (q-1)x_{87}$$

$$x_{54}.4 = x_{122}.2'32 - (q-1)^2x_{81}.2'32 + (q-1)x_{51}.324 - q(q-1)x_{39}.2'32 \\ = \frac{1}{q}(x_{129} - (q-1)x_{127} - (q-1)^2x_{90} + (q-1)^3x_{87}) - (q-1)(q2'3'2 \cdot x_{44} + (q-1)1 \cdot x_{36} - (q-1)2'321323' \cdot x_{34}) \\ + (q-1)(2'32 \cdot x_{83} + (q-1)3231 \cdot x_{33} - (q-1)32 \cdot x_{80} + (q-1)^2(323'1 - 2'321) \cdot x_{34})$$

Merci !