

Noeuds et tresses : de la topologie aux représentations de groupes.

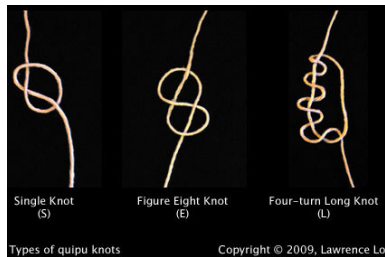
Ivan Marin

LAMFA

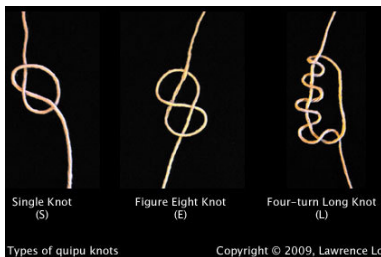
Université de Picardie-Jules Verne

Journée du Labo, Amiens le 5 juin 2013

Un noeud est



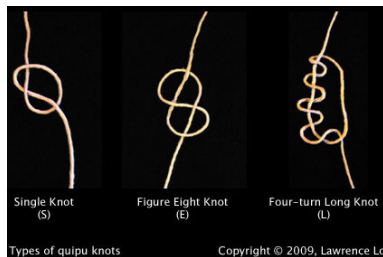
Un **noeud** est



c'est-à-dire un plongement

$$f :] - \infty, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^3$$

Un noeud est

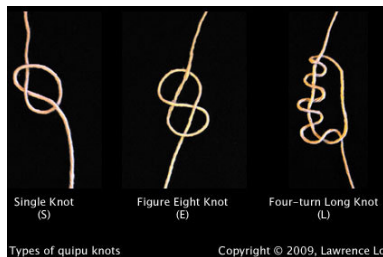


c'est-à-dire un plongement

$$f :] - \infty, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^3$$

considéré modulo homotopie, en gardant $f(-\infty) = f(+\infty) = \infty$.

Un **noeud** est



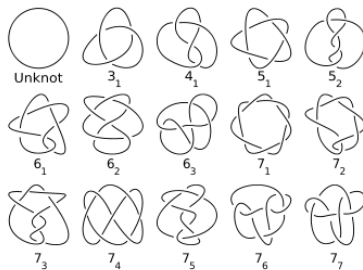
c'est-à-dire un plongement

$$f :] - \infty, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^3$$

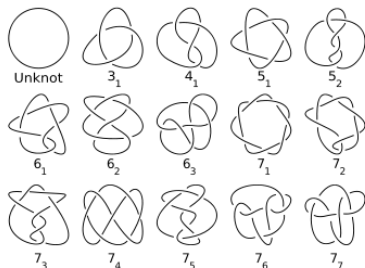
considéré modulo homotopie, en gardant $f(-\infty) = f(+\infty) = \infty$.
De manière équivalente :

Un **noeud** est

Un noeud est



Un **noeud** est

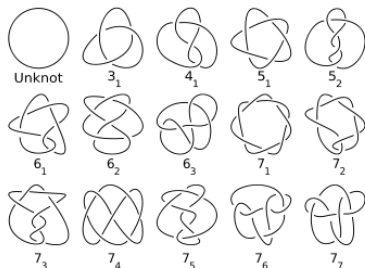


c'est-à-dire un plongement

$$f : S^1 \rightarrow S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$$

considéré modulo homotopie.

Un **noeud** est



c'est-à-dire un plongement

$$f : S^1 \rightarrow S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$$

considéré modulo homotopie.

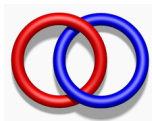
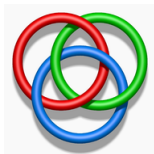
De façon plus générale

Un **entrelacs** est

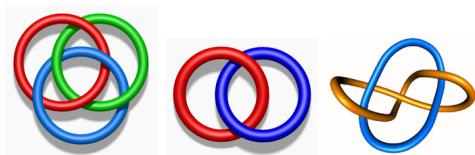
Un entrelacs est



Un **entrelacs** est



Un **entrelacs** est



c'est-à-dire un plongement

$$f : S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1 \rightarrow S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$$

considéré modulo homotopie.

Questions de base :

Questions de base :

- ▶ comment savoir si un noeud ou un entrelacs est dénoué ?

Questions de base :

- ▶ comment savoir si un noeud ou un entrelacs est dénoué ?
- ▶ comment savoir si deux noeuds ou deux entrelacs sont les mêmes ?

Questions de base :

- ▶ comment savoir si un noeud ou un entrelacs est dénoué ?
- ▶ comment savoir si deux noeuds ou deux entrelacs sont les mêmes ?

Exemples de situations topologiques où ces questions apparaissent naturellement :

Questions de base :

- ▶ comment savoir si un noeud ou un entrelacs est dénoué ?
- ▶ comment savoir si deux noeuds ou deux entrelacs sont les mêmes ?

Exemples de situations topologiques où ces questions apparaissent naturellement :

- ▶ fibration de Hopf $S^1 \rightarrow S^3 \rightarrow S^2$.

Questions de base :

- ▶ comment savoir si un noeud ou un entrelacs est dénoué ?
- ▶ comment savoir si deux noeuds ou deux entrelacs sont les mêmes ?

Exemples de situations topologiques où ces questions apparaissent naturellement :

- ▶ fibration de Hopf $S^1 \rightarrow S^3 \rightarrow S^2$.
- ▶ études de singularités

Questions de base :

- ▶ comment savoir si un noeud ou un entrelacs est dénoué ?
- ▶ comment savoir si deux noeuds ou deux entrelacs sont les mêmes ?

Exemples de situations topologiques où ces questions apparaissent naturellement :

- ▶ fibration de Hopf $S^1 \rightarrow S^3 \rightarrow S^2$.
- ▶ études de singularités
- ▶ étude des variétés de dimension 3.

Questions de base :

- ▶ comment savoir si un noeud ou un entrelacs est dénoué ?
- ▶ comment savoir si deux noeuds ou deux entrelacs sont les mêmes ?

Exemples de situations topologiques où ces questions apparaissent naturellement :

- ▶ fibration de Hopf $S^1 \rightarrow S^3 \rightarrow S^2$.
- ▶ études de singularités
- ▶ étude des variétés de dimension 3.
- ▶ ...

Exemple de question pratique :

Exemple de question pratique :
comparer

$$Z_1 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x^6 \neq y^2\}$$

Exemple de question pratique :
comparer

$$Z_1 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x^6 \neq y^2\}$$

et

$$Z_2 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x(x^2 - y^3) \neq 0\}.$$

Exemple de question pratique :
comparer

$$Z_1 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x^6 \neq y^2\}$$

et

$$Z_2 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x(x^2 - y^3) \neq 0\}.$$

Soit

$$D_1 = Z_1 \cap B(0, R), D_2 = Z_2 \cap B(0, R).$$

pour R grand.

Exemple de question pratique :
comparer

$$Z_1 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x^6 \neq y^2\}$$

et

$$Z_2 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x(x^2 - y^3) \neq 0\}.$$

Soit

$$D_1 = Z_1 \cap B(0, R), D_2 = Z_2 \cap B(0, R).$$

pour R grand. Alors $D_1, D_2 \subset B(0, R) \simeq S^3$ sont des entrelacs
(non orientés).

Exemple de question pratique :
comparer

$$Z_1 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x^6 \neq y^2\}$$

et

$$Z_2 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x(x^2 - y^3) \neq 0\}.$$

Soit

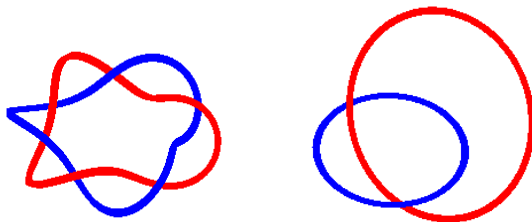
$$D_1 = Z_1 \cap B(0, R), D_2 = Z_2 \cap B(0, R).$$

pour R grand. Alors $D_1, D_2 \subset B(0, R) \simeq S^3$ sont des entrelacs
(non orientés).

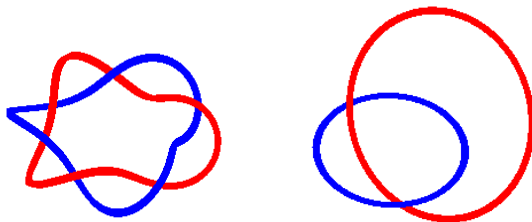
Comment les distinguer ?

```
with(algcurves);  
f1 := x^6 - y^2;  
f2 := x*(x^2 - y^3);  
printlevel := 2;  
plot_knot(f1,x,y,epsilon = 0.5, color = [blue,red]);  
plot_knot(f2,x,y,epsilon = 0.03, color = [blue,red]);
```

```
with(algcurves);  
f1 := x^6 - y^2;  
f2 := x*(x^2 - y^3);  
printlevel := 2;  
plot_knot(f1,x,y,epsilon = 0.5, color = [blue,red]);  
plot_knot(f2,x,y,epsilon = 0.03, color = [blue,red]);
```



```
with(algcurves);  
f1 := x^6 - y^2;  
f2 := x*(x^2 - y^3);  
printlevel := 2;  
plot_knot(f1,x,y,epsilon = 0.5, color = [blue,red]);  
plot_knot(f2,x,y,epsilon = 0.03, color = [blue,red]);
```

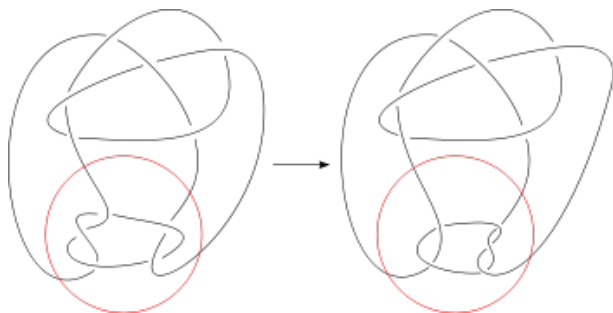


On est ramené à démontrer que ces deux entrelacs sont différents.

Exemple de nœuds difficiles à distinguer :

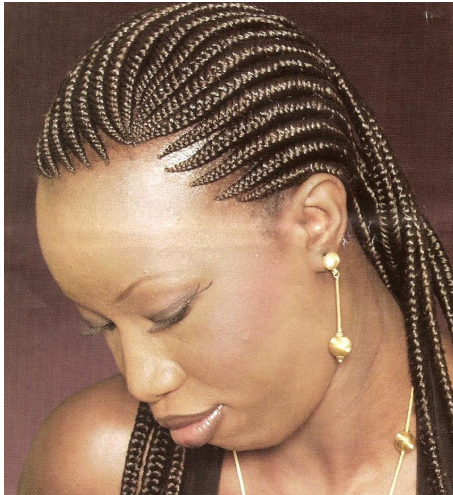
Exemple de nœuds difficiles à distinguer : ceux obtenus par
'mutation'

Exemple de nœuds difficiles à distinguer : ceux obtenus par
'mutation'



Une tresse est

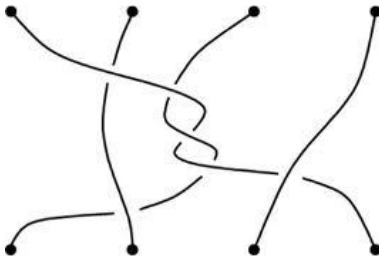
Une tresse est



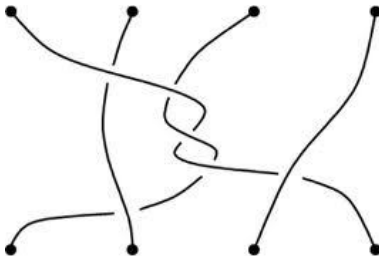
Une tresse

Une tresse (ici à 4 brins)

Une tresse (ici à 4 brins) est

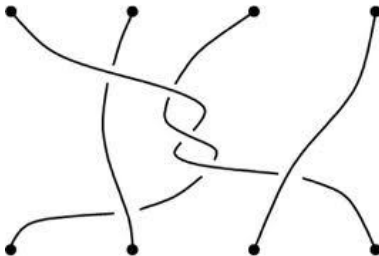


Une tresse (ici à 4 brins) est



Propriété fondamentale :

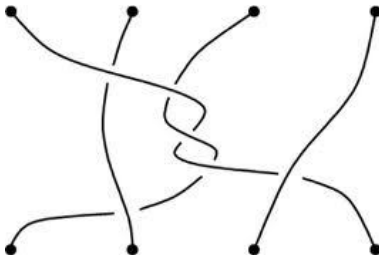
Une tresse (ici à 4 brins) est



Propriété fondamentale :

l'ensemble des tresses sur n brins forme un groupe, noté B_n ;

Une tresse (ici à 4 brins) est

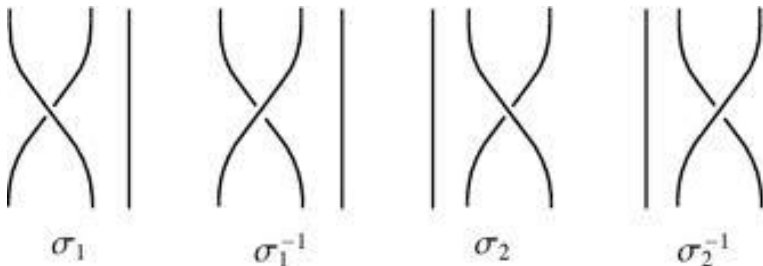


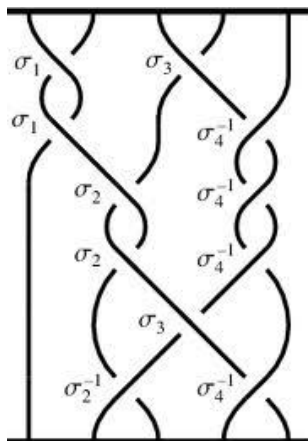
Propriété fondamentale :

l'ensemble des tresses sur n brins forme un groupe, noté B_n ; en effet, on peut 'composer' deux tresses en mettant la deuxième sous la première.

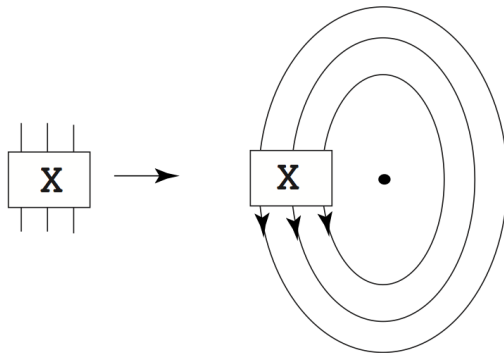
On a $n - 1$ générateurs naturels $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ consistant en les entrelacements simples de deux brins consécutifs.

On a $n - 1$ générateurs naturels $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ consistant en les entrelacements simples de deux brins consécutifs.



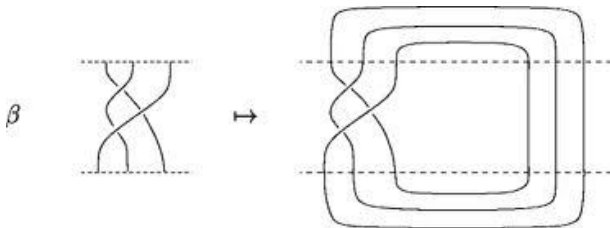


A toute tresse $\beta \in B_n$ on peut associer un entrelacs $\hat{\beta}$, appelé sa **clôture**.



Théorème d'Alexander (1923) : tout entrelacs est clôture d'une certaine tresse.

A toute tresse $\beta \in B_n$ on peut associer un entrelacs $\hat{\beta}$, appelé sa **clôture**.



Théorème d'Alexander (1923) : tout entrelacs est clôture d'une certaine tresse.

Question : si $\beta_1 \in B_{n_1}$, $\beta_2 \in B_{n_2}$, comment savoir si $\hat{\beta}_1 = \hat{\beta}_2$?

Question : si $\beta_1 \in B_{n_1}$, $\beta_2 \in B_{n_2}$, comment savoir si $\hat{\beta}_1 = \hat{\beta}_2$?

Théorème de Markov (1935)

Question : si $\beta_1 \in B_{n_1}$, $\beta_2 \in B_{n_2}$, comment savoir si $\widehat{\beta}_1 = \widehat{\beta}_2$?

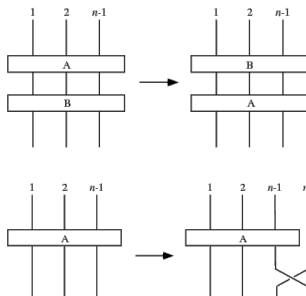
Théorème de Markov (1935)

$\widehat{\beta}_1 = \widehat{\beta}_2$ ssi β_1 peut se transformer en β_2 par une suite de transformations élémentaires d'un des deux types suivants

Question : si $\beta_1 \in B_{n_1}$, $\beta_2 \in B_{n_2}$, comment savoir si $\widehat{\beta}_1 = \widehat{\beta}_2$?

Théorème de Markov (1935)

$\widehat{\beta}_1 = \widehat{\beta}_2$ ssi β_1 peut se transformer en β_2 par une suite de transformations élémentaires d'un des deux types suivants



En d'autres termes,

En d'autres termes, on peut construire un *invariant des noeuds* (et des entrelacs)

En d'autres termes, on peut construire un *invariant des noeuds* (et des entrelacs) à valeurs dans un ensemble 'simple' K

En d'autres termes, on peut construire un *invariant des noeuds* (et des entrelacs) à valeurs dans un ensemble 'simple' K si l'on a une suite d'applications $f_n : B_n \rightarrow K$

En d'autres termes, on peut construire un *invariant des noeuds* (et des entrelacs) à valeurs dans un ensemble 'simple' K si l'on a une suite d'applications $f_n : B_n \rightarrow K$ telle que

- ▶ $\forall g \in B_n \quad f_{n+1}(g\sigma_n) = f_{n+1}(g\sigma_n^{-1}) = f_n(g)$ ('propriété de Markov')
- ▶ $\forall g, h \in B_n \quad f_n(ghg^{-1}) = f_n(h)$

En d'autres termes, on peut construire un *invariant des noeuds* (et des entrelacs) à valeurs dans un ensemble 'simple' K si l'on a une suite d'applications $f_n : B_n \rightarrow K$ telle que

- ▶ $\forall g \in B_n \quad f_{n+1}(g\sigma_n) = f_{n+1}(g\sigma_n^{-1}) = f_n(g)$ ('propriété de Markov')
- ▶ $\forall g, h \in B_n \quad f_n(ghg^{-1}) = f_n(h)$

La deuxième condition dit que f_n est une fonction de la **classe de conjugaison** de $g \in B_n$.

Idée :

Idée : si K est un corps,

Idée : si K est un corps, trouver des familles de **représentations**

$$R_n : B_n \rightarrow \mathrm{GL}_{c(n)}(K)$$

Idée : si K est un corps, trouver des familles de **représentations**

$$R_n : B_n \rightarrow \mathrm{GL}_{c(n)}(K)$$

telles que $f_n = \mathrm{tr} \circ R_n : B_n \rightarrow K$ vérifie la propriété de Markov.

Idée : si K est un corps, trouver des familles de **représentations**

$$R_n : B_n \rightarrow \mathrm{GL}_{c(n)}(K)$$

telles que $f_n = \mathrm{tr} \circ R_n : B_n \rightarrow K$ vérifie la propriété de Markov.

Problème : Comment trouver des représentations de B_n ?

Crash course : théorie des représentations.

Crash course : théorie des représentations.

Si G est un groupe, K un corps, on construit l'algèbre de groupe KG .

Crash course : théorie des représentations.

Si G est un groupe, K un corps, on construit l'«algèbre de groupe» KG .

C'est l'ensemble des combinaisons linéaires formelles d'éléments de G , pour la multiplication naïve. Les éléments de G en forment une base, par définition.

Crash course : théorie des représentations.

Si G est un groupe, K un corps, on construit l'«algèbre de groupe» KG .

C'est l'ensemble des combinaisons linéaires formelles d'éléments de G , pour la multiplication naïve. Les éléments de G en forment une base, par définition.

Représentation de $G = KG$ -module

Crash course : théorie des représentations.

Si G est un groupe, K un corps, on construit l'«algèbre de groupe» KG .

C'est l'ensemble des combinaisons linéaires formelles d'éléments de G , pour la multiplication naïve. Les éléments de G en forment une base, par définition.

Représentation de $G = KG$ -module

Si G est fini, KG est une algèbre de dimension finie, objet classique.

Crash course : théorie des représentations.

Si G est un groupe, K un corps, on construit l'«algèbre de groupe» KG .

C'est l'ensemble des combinaisons linéaires formelles d'éléments de G , pour la multiplication naïve. Les éléments de G en forment une base, par définition.

Représentation de $G = KG$ -module

Si G est fini, KG est une algèbre de dimension finie, objet classique. Une représentation naturelle de G est donnée par la multiplication à gauche dans $KG \simeq K^{|G|}$.

Crash course : théorie des représentations.

Si G est un groupe, K un corps, on construit l'«algèbre de groupe» KG .

C'est l'ensemble des combinaisons linéaires formelles d'éléments de G , pour la multiplication naïve. Les éléments de G en forment une base, par définition.

Représentation de $G = KG$ -module

Si G est fini, KG est une algèbre de dimension finie, objet classique. Une représentation naturelle de G est donnée par la multiplication à gauche dans $KG \simeq K^{|G|}$.

Sinon, c'est l'horreur.

Crash course : théorie des représentations.

Si G est un groupe, K un corps, on construit l'«algèbre de groupe» KG .

C'est l'ensemble des combinaisons linéaires formelles d'éléments de G , pour la multiplication naïve. Les éléments de G en forment une base, par définition.

Représentation de $G = KG$ -module

Si G est fini, KG est une algèbre de dimension finie, objet classique. Une représentation naturelle de G est donnée par la multiplication à gauche dans $KG \simeq K^{|G|}$.

Sinon, c'est l'horreur.

Si G est sans torsion, comme ici, c'est encore plus l'horreur.

Crash course : théorie des représentations.

Si G est un groupe, K un corps, on construit l'«algèbre de groupe» KG .

C'est l'ensemble des combinaisons linéaires formelles d'éléments de G , pour la multiplication naïve. Les éléments de G en forment une base, par définition.

Représentation de $G = KG$ -module

Si G est fini, KG est une algèbre de dimension finie, objet classique. Une représentation naturelle de G est donnée par la multiplication à gauche dans $KG \simeq K^{|G|}$.

Sinon, c'est l'horreur.

Si G est sans torsion, comme ici, c'est encore plus l'horreur.

Fin du crash course.

Idée 2 : utiliser des quotients de dimension finie, donc des idéaux I_n de KB_n tels que KB_n/I_n soit de dimension finie.

Idée 2 : utiliser des quotients de dimension finie, donc des idéaux I_n de KB_n tels que KB_n/I_n soit de dimension finie.

Idée 2.0 : utiliser des quotients S_n finis du groupe B_n . Alors KS_n sera un quotient de dimension finie de KB_n .

Idée 2 : utiliser des quotients de dimension finie, donc des idéaux I_n de KB_n tels que KB_n/I_n soit de dimension finie.

Idée 2.0 : utiliser des quotients S_n finis du groupe B_n . Alors KS_n sera un quotient de dimension finie de KB_n .

Par exemple, prenons pour S_n le groupe symétrique : c'est le quotient de B_n par l'identification $\sigma_i = \sigma_i^{-1}$, i.e. $\sigma_i^2 = 1$. (on ne distingue pas les croisements positifs des négatifs).

Idée 2 : utiliser des quotients de dimension finie, donc des idéaux I_n de KB_n tels que KB_n/I_n soit de dimension finie.

Idée 2.0 : utiliser des quotients S_n finis du groupe B_n . Alors KS_n sera un quotient de dimension finie de KB_n .

Par exemple, prenons pour S_n le groupe symétrique : c'est le quotient de B_n par l'identification $\sigma_i = \sigma_i^{-1}$, i.e. $\sigma_i^2 = 1$. (on ne distingue pas les croisements positifs des négatifs).

Mauvaise idée ! Un noeud dans lequel on ne distingue pas les croisements n'est jamais... noué !

Idée 2 : utiliser des quotients de dimension finie, donc des idéaux I_n de KB_n tels que KB_n/I_n soit de dimension finie.

Idée 2.0 : utiliser des quotients S_n finis du groupe B_n . Alors KS_n sera un quotient de dimension finie de KB_n .

Par exemple, prenons pour S_n le groupe symétrique : c'est le quotient de B_n par l'identification $\sigma_i = \sigma_i^{-1}$, i.e. $\sigma_i^2 = 1$. (on ne distingue pas les croisements positifs des négatifs).

Mauvaise idée ! Un noeud dans lequel on ne distingue pas les croisements n'est jamais... noué !

De façon générale, toutes les tresses dans le noyau du morphisme $B_n \twoheadrightarrow S_n$ donneront des noeuds indistingables...

Idée 2 : utiliser des quotients de dimension finie, donc des idéaux I_n de KB_n tels que KB_n/I_n soit de dimension finie.

Idée 2 : utiliser des quotients de dimension finie, donc des idéaux I_n de KB_n tels que KB_n/I_n soit de dimension finie.

Idée 2.1 : comme $S_n = B_n/(\sigma_i^2 - 1)$ est fini, donc $KS_n = (KB_n)/(\sigma_i - 1)(\sigma_i + 1)$ est de dimension finie, peut-être que $H_n(a, b) = (KB_n)/(\sigma_i - a)(\sigma_i - b)$ le sera pour d'autres $a, b \in K$?

Idée 2 : utiliser des quotients de dimension finie, donc des idéaux I_n de KB_n tels que KB_n/I_n soit de dimension finie.

Idée 2.1 : comme $S_n = B_n/(\sigma_i^2 - 1)$ est fini, donc $KS_n = (KB_n)/(\sigma_i - 1)(\sigma_i + 1)$ est de dimension finie, peut-être que $H_n(a, b) = (KB_n)/(\sigma_i - a)(\sigma_i - b)$ le sera pour d'autres $a, b \in K$?

Oui ! cette algèbre est un objet classique, relié pour $a = -1, b = p$ au groupe fini $GL_n(\mathbb{F}_p)$. J. Tits (1960's) a démontré qu'elle était de dimension finie.

Idée 2 : utiliser des quotients de dimension finie, donc des idéaux I_n de KB_n tels que KB_n/I_n soit de dimension finie.

Idée 2.1 : comme $S_n = B_n/(\sigma_i^2 = 1)$ est fini, donc $KS_n = (KB_n)/(\sigma_i - 1)(\sigma_i + 1)$ est de dimension finie, peut-être que $H_n(a, b) = (KB_n)/(\sigma_i - a)(\sigma_i - b)$ le sera pour d'autres $a, b \in K$?

Oui ! cette algèbre est un objet classique, relié pour $a = -1, b = p$ au groupe fini $GL_n(\mathbb{F}_p)$. J. Tits (1960's) a démontré qu'elle était de dimension finie.

Théorème

(V. Jones+, 1984+...) Il existe une famille de $H_n(a, b)$ -modules fournissant une trace de Markov. L'invariant correspondant est donné par le polynôme de Jones.

Depuis, énormément d'invariants provenant de traces de Markov ont été construits à partir de la théorie des groupes quantiques, mais ils sont moins faciles à décrire.

Depuis, énormément d'invariants provenant de traces de Markov ont été construits à partir de la théorie des groupes quantiques, mais ils sont moins faciles à décrire.

Aperçu : G un groupe de Lie complexe, agissant sur un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel V de dimension finie.

Depuis, énormément d'invariants provenant de traces de Markov ont été construits à partir de la théorie des groupes quantiques, mais ils sont moins faciles à décrire.

Aperçu : G un groupe de Lie complexe, agissant sur un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel V de dimension finie.

(par exemple $G = GL_N(\mathbb{C})$, $V = \mathbb{C}^N$)

Depuis, énormément d'invariants provenant de traces de Markov ont été construits à partir de la théorie des groupes quantiques, mais ils sont moins faciles à décrire.

Aperçu : G un groupe de Lie complexe, agissant sur un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel V de dimension finie.

(par exemple $G = GL_N(\mathbb{C})$, $V = \mathbb{C}^N$)

Alors G agit sur l'ensemble E_n des formes n -linéaires $f : V^n \rightarrow \mathbb{C}$.

Depuis, énormément d'invariants provenant de traces de Markov ont été construits à partir de la théorie des groupes quantiques, mais ils sont moins faciles à décrire.

Aperçu : G un groupe de Lie complexe, agissant sur un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel V de dimension finie.

(par exemple $G = GL_N(\mathbb{C})$, $V = \mathbb{C}^N$)

Alors G agit sur l'ensemble E_n des formes n -linéaires $f : V^n \rightarrow \mathbb{C}$.
On a une opération $f \mapsto s.f$ de permutation des facteurs

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(x_{s(1)}, \dots, x_{s(n)})$$

qui définit une action du groupe symétrique, et qui commute à cette action de G .

Depuis, énormément d'invariants provenant de traces de Markov ont été construits à partir de la théorie des groupes quantiques, mais ils sont moins faciles à décrire.

Depuis, énormément d'invariants provenant de traces de Markov ont été construits à partir de la théorie des groupes quantiques, mais ils sont moins faciles à décrire.

Aperçu : G un groupe **quantique** complexe, agissant sur un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel V de dimension finie.

Depuis, énormément d'invariants provenant de traces de Markov ont été construits à partir de la théorie des groupes quantiques, mais ils sont moins faciles à décrire.

Aperçu : G un groupe **quantique** complexe, agissant sur un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel V de dimension finie.

Alors G agit sur l'ensemble E_n des formes n -linéaires $f : V^n \rightarrow \mathbb{C}$. On a une opération $f \mapsto s.f$ qui définit une action du **groupe de tresses**, et qui commute à cette action de G .

Depuis, énormément d'invariants provenant de traces de Markov ont été construits à partir de la théorie des groupes quantiques, mais ils sont moins faciles à décrire.

Aperçu : G un groupe **quantique** complexe, agissant sur un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel V de dimension finie.

Alors G agit sur l'ensemble E_n des formes n -linéaires $f : V^n \rightarrow \mathbb{C}$. On a une opération $f \mapsto s.f$ qui définit une action du **groupe de tresses**, et qui commute à cette action de G .

De plus, la trace de $f \mapsto s.f$ comme application linéaire $E_n \rightarrow E_n$ définit une trace de Markov !

Depuis, énormément d'invariants provenant de traces de Markov ont été construits à partir de la théorie des groupes quantiques, mais ils sont moins faciles à décrire.

Aperçu : G un groupe **quantique** complexe, agissant sur un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel V de dimension finie.

Alors G agit sur l'ensemble E_n des formes n -linéaires $f : V^n \rightarrow \mathbb{C}$. On a une opération $f \mapsto s.f$ qui définit une action du **groupe de tresses**, et qui commute à cette action de G .

De plus, la trace de $f \mapsto s.f$ comme application linéaire $E_n \rightarrow E_n$ définit une trace de Markov !

Le cas $V = \mathbb{C}^N$ et $G = \mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$ provient de l'algèbre de Hecke. Qu'en est-il des autres ?

Depuis, énormément d'invariants provenant de traces de Markov ont été construits à partir de la théorie des groupes quantiques, mais ils sont moins faciles à décrire.

Aperçu : G un groupe **quantique** complexe, agissant sur un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel V de dimension finie.

Alors G agit sur l'ensemble E_n des formes n -linéaires $f : V^n \rightarrow \mathbb{C}$. On a une opération $f \mapsto s.f$ qui définit une action du **groupe de tresses**, et qui commute à cette action de G .

De plus, la trace de $f \mapsto s.f$ comme application linéaire $E_n \rightarrow E_n$ définit une trace de Markov !

Le cas $V = \mathbb{C}^N$ et $G = \mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$ provient de l'algèbre de Hecke. Qu'en est-il des autres ?

En général, les tresses élémentaires σ_i sont annulées par un polynôme de grand degré, ce qui rend l'analyse combinatoire de la situation très complexe.

Pourquoi ne peut-on pas continuer la même idée qu'auparavant, en remplaçant 2 par 3 ?

Pourquoi ne peut-on pas continuer la même idée qu'auparavant, en remplaçant 2 par 3 ?

Soit Γ_n le quotient de B_n par la relation $\sigma_i^3 = 1$.

Pourquoi ne peut-on pas continuer la même idée qu'auparavant, en remplaçant 2 par 3 ?

Soit Γ_n le quotient de B_n par la relation $\sigma_i^3 = 1$.

On peut définir $H_n(a, b, c) = KB_n/(\sigma_i - a)(\sigma_i - b)(\sigma_i - c)$,

Pourquoi ne peut-on pas continuer la même idée qu'auparavant, en remplaçant 2 par 3 ?

Soit Γ_n le quotient de B_n par la relation $\sigma_i^3 = 1$.

On peut définir $H_n(a, b, c) = KB_n/(\sigma_i - a)(\sigma_i - b)(\sigma_i - c)$,
déformation de $H_n(1, j, j^2) = K\Gamma_n$.

Pourquoi ne peut-on pas continuer la même idée qu'auparavant, en remplaçant 2 par 3 ?

Soit Γ_n le quotient de B_n par la relation $\sigma_i^3 = 1$.

On peut définir $H_n(a, b, c) = KB_n/(\sigma_i - a)(\sigma_i - b)(\sigma_i - c)$,
déformation de $H_n(1, j, j^2) = K\Gamma_n$.

Mais Γ_n est-il fini ?

Pourquoi ne peut-on pas continuer la même idée qu'auparavant, en remplaçant 2 par 3 ?

Soit Γ_n le quotient de B_n par la relation $\sigma_i^3 = 1$.

On peut définir $H_n(a, b, c) = KB_n/(\sigma_i - a)(\sigma_i - b)(\sigma_i - c)$,
déformation de $H_n(1, j, j^2) = K\Gamma_n$.

Mais Γ_n est-il fini ?

Théorème

(Coxeter, 1950's) Γ_n est fini si et seulement si $n \leq 5$.

Pourquoi ne peut-on pas continuer la même idée qu'auparavant, en remplaçant 2 par 3 ?

Soit Γ_n le quotient de B_n par la relation $\sigma_i^3 = 1$.

On peut définir $H_n(a, b, c) = KB_n/(\sigma_i - a)(\sigma_i - b)(\sigma_i - c)$,
déformation de $H_n(1, j, j^2) = K\Gamma_n$.

Mais Γ_n est-il fini ?

Théorème

(Coxeter, 1950's) Γ_n est fini si et seulement si $n \leq 5$.

$\Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5$ sont d'ordre 24, 648, 155520.

Pourquoi ne peut-on pas continuer la même idée qu'auparavant, en remplaçant 2 par 3 ?

Soit Γ_n le quotient de B_n par la relation $\sigma_i^3 = 1$.

On peut définir $H_n(a, b, c) = KB_n/(\sigma_i - a)(\sigma_i - b)(\sigma_i - c)$,
déformation de $H_n(1, j, j^2) = K\Gamma_n$.

Mais Γ_n est-il fini ?

Théorème

(Coxeter, 1950's) Γ_n est fini si et seulement si $n \leq 5$.

$\Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5$ sont d'ordre 24, 648, 155520.

Ce sont des groupes de symétrie de polytopes complexes.

Confirmant une conjecture de M. Broué et G. Malle, j'ai montré

Théorème

(I.M., 2011) $H_n(a, b, c)$ est de dimension finie pour $n \leq 5$.

Confirmant une conjecture de M. Broué et G. Malle, j'ai montré

Théorème

(I.M., 2011) $H_n(a, b, c)$ est de dimension finie pour $n \leq 5$.

Problème : on a besoin de traces pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $H_n(a, b, c)$ est de dimension infinie pour $n \geq 6$...

Confirmant une conjecture de M. Broué et G. Malle, j'ai montré

Théorème

(I.M., 2011) $H_n(a, b, c)$ est de dimension finie pour $n \leq 5$.

Problème : on a besoin de traces pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $H_n(a, b, c)$ est de dimension infinie pour $n \geq 6$...

Idée 3 : chercher des idéaux I_n de $H_n(a, b, c)$ tels que $H_n(a, b, c)/I_n$ soit de dimension finie.

Confirmant une conjecture de M. Broué et G. Malle, j'ai montré

Théorème

(I.M., 2011) $H_n(a, b, c)$ est de dimension finie pour $n \leq 5$.

Problème : on a besoin de traces pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $H_n(a, b, c)$ est de dimension infinie pour $n \geq 6$...

Idée 3 : chercher des idéaux I_n de $H_n(a, b, c)$ tels que $H_n(a, b, c)/I_n$ soit de dimension finie.

$\rightsquigarrow$ Projet en cours.

Confirmant une conjecture de M. Broué et G. Malle, j'ai montré

Théorème

(I.M., 2011) $H_n(a, b, c)$ est de dimension finie pour $n \leq 5$.

Problème : on a besoin de traces pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $H_n(a, b, c)$ est de dimension infinie pour $n \geq 6$...

Idée 3 : chercher des idéaux I_n de $H_n(a, b, c)$ tels que $H_n(a, b, c)/I_n$ soit de dimension finie.

$\rightsquigarrow$ Projet en cours. Pour ceci, on peut

Confirmant une conjecture de M. Broué et G. Malle, j'ai montré

Théorème

(I.M., 2011) $H_n(a, b, c)$ est de dimension finie pour $n \leq 5$.

Problème : on a besoin de traces pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $H_n(a, b, c)$ est de dimension infinie pour $n \geq 6$...

Idée 3 : chercher des idéaux I_n de $H_n(a, b, c)$ tels que $H_n(a, b, c)/I_n$ soit de dimension finie.

↪ Projet en cours. Pour ceci, on peut

- rechercher les idéaux de H_3, H_4, H_5

Confirmant une conjecture de M. Broué et G. Malle, j'ai montré

Théorème

(I.M., 2011) $H_n(a, b, c)$ est de dimension finie pour $n \leq 5$.

Problème : on a besoin de traces pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $H_n(a, b, c)$ est de dimension infinie pour $n \geq 6$...

Idée 3 : chercher des idéaux I_n de $H_n(a, b, c)$ tels que $H_n(a, b, c)/I_n$ soit de dimension finie.

↪ Projet en cours. Pour ceci, on peut

- ▶ rechercher les idéaux de H_3, H_4, H_5
- ▶ déterminer pour chacun d'entre eux si l'idéal I_n qu'ils engendrent dans $H_n(a, b, c)$ vérifie cette propriété de finitude.

Confirmant une conjecture de M. Broué et G. Malle, j'ai montré

Théorème

(I.M., 2011) $H_n(a, b, c)$ est de dimension finie pour $n \leq 5$.

Problème : on a besoin de traces pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $H_n(a, b, c)$ est de dimension infinie pour $n \geq 6$...

Idée 3 : chercher des idéaux I_n de $H_n(a, b, c)$ tels que $H_n(a, b, c)/I_n$ soit de dimension finie.

↪ Projet en cours. Pour ceci, on peut

- ▶ rechercher les idéaux de H_3, H_4, H_5
- ▶ déterminer pour chacun d'entre eux si l'idéal I_n qu'ils engendrent dans $H_n(a, b, c)$ vérifie cette propriété de finitude.

Cette approche a également permis (en collaboration avec E. Wagner, 2012) de décrire l'algèbre correspondant à un invariant quantique 'cubique', le polynôme de Links-Gould.

Confirmant une conjecture de M. Broué et G. Malle, j'ai montré

Théorème

(I.M., 2011) $H_n(a, b, c)$ est de dimension finie pour $n \leq 5$.

Problème : on a besoin de traces pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $H_n(a, b, c)$ est de dimension infinie pour $n \geq 6$. .

Idée 3 : chercher des idéaux I_n de $H_n(a, b, c)$ tels que $H_n(a, b, c)/I_n$ soit de dimension finie.

↪ Projet en cours. Pour ceci, on peut

- ▶ rechercher les idéaux de H_3, H_4, H_5
- ▶ déterminer pour chacun d'entre eux si l'idéal I_n qu'ils engendrent dans $H_n(a, b, c)$ vérifie cette propriété de finitude.

Cette approche a également permis (en collaboration avec E. Wagner, 2012) de décrire l'algèbre correspondant à un invariant quantique 'cubique', le polynôme de Links-Gould.
($G = \mathrm{SL}(2|1)$, V de dimension 4).

Merci à Yann pour cette journée !