

UNE CARACTÉRISATION TENSORIELLE DES REPRÉSENTATIONS STANDARD

IVAN MARIN

Abstract Considering (finite dimensional, complex) simple Lie algebras of type A , we notice that the symmetric and antisymmetric tensor squares of the standard representation are irreducible. More generally, the number of irreducible components in the symmetric and antisymmetric squares of a representation V of a simple Lie algebra is very small if V is a standard representation. We show here that this number, along with the type (orthogonal or symplectic) of the representation, characterizes the standard representations of type A , B , C , and D among all the (finite dimensional) representations of any simple Lie algebras. We use this property and describe a process of decomposition for semi-simple, finite dimensional complex Lie algebras.

1. INTRODUCTION

Si V est la représentation standard $\mathbb{C}^n$ d'une des algèbres de Lie complexes classiques $\mathfrak{sl}_n$, $\mathfrak{so}_n$, $\mathfrak{sp}_n$, son carré tensoriel se décompose en une partie symétrique et une partie alternée (ou antisymétrique). Dans le cas de $\mathfrak{sl}_n$, ces deux parties sont irréductibles. Dans les autres cas, la place de la représentation triviale (dans la partie symétrique ou alternée) permet de distinguer $\mathfrak{so}_n$ de $\mathfrak{sp}_n$. Dans ces deux derniers cas, ce qui reste de la partie symétrique ou alternée est irréductible.

Nous montrons ici que cette propriété est caractéristique de ces représentations standard parmi toutes les représentations irréductibles de toutes les algèbres de Lie simples. Plus précisément, si V est une représentation (toujours supposée de dimension finie) d'une algèbre de Lie simple (toujours supposée complexe de dimension finie) qui vérifie une des propriétés énoncées ci-dessus, alors c'est la représentation standard d'une algèbre de Lie classique bien déterminée par cette propriété. Nous en déduisons une propriété de décomposition des algèbres de Lie semi-simples.

Lorsque λ est un poids dominant, on notera Γ_λ la représentation irréductible associée, ou simplement λ s'il n'y a pas de risque de confusion. On notera en particulier λ^* la représentation contragrédiante de λ . $E(x)$ désigne la partie entière du réel x . Si V est une représentation de $\mathcal{G}$, on notera $N(V)$ le nombre de composantes irréductibles de V , $S^2(V)$ (resp. $\Lambda^2(V)$) son carré symétrique (resp. antisymétrique ou alterné). On dira que V est de type (p, q) si $N(S^2(V)) = p$ et $N(\Lambda^2(V)) = q$. On a bien sûr $N(V \otimes V) = p + q$. On note enfin ω_n le $n^{\text{ème}}$ poids dominant de $\mathcal{G}$, suivant l'ordre choisi par [Bou], et pour α une racine simple de $\mathcal{G}$, on note X_α , Y_α et H_α les éléments de la base de Weyl associés.

Ces résultats ont été obtenus dans le cadre de ma thèse, effectuée sous la direction de Pierre Cartier, que je remercie chaleureusement ici, pour son aide précieuse et ses encouragements permanents.

2. LEMMES PRÉLIMINAIRES

Lemme 1. *Soient V et W deux représentations irréductibles d'une algèbre de Lie $\mathcal{G}$ simple de dimension finie. Si $V \otimes W$ est irréductible, alors V ou W est la représentation triviale.*

Preuve — On note $V = \Gamma_\lambda$, $W = \Gamma_\mu$, $(\cdot, \cdot)$ la forme de Killing de $\mathcal{G}$, R^+ l'ensemble des racines positives, ρ la demi-somme des racines positives, somme des poids fondamentaux.

La formule des caractères de Weyl donne une formule pour la dimension :

$$\dim \Gamma_\lambda = \prod_{\alpha \in R^+} \frac{(\lambda + \rho, \alpha)}{(\rho, \alpha)}$$

Si v (resp. w) est un vecteur de plus haut poids de V (resp. W), alors $v \otimes w$ est un vecteur de plus haut poids de $V \otimes W$.

Dire que $V \otimes W$ est irréductible revient à dire que c'est le seul, i.e.

$$\dim(\Gamma_\lambda \otimes \Gamma_\mu) = \dim \Gamma_{\lambda+\mu}$$

soit

$$\frac{\dim \Gamma_{\lambda+\mu}}{(\dim \Gamma_\lambda)(\dim \Gamma_\mu)} = \prod_{\alpha \in R^+} \frac{(\rho, \alpha)(\lambda + \mu + \rho, \alpha)}{(\lambda + \rho, \alpha)(\mu + \rho, \alpha)} = \prod_{\alpha \in R^+} Q(\alpha) = 1$$

avec

$$Q(\alpha) = \frac{(\rho, \alpha)(\lambda + \mu + \rho, \alpha)}{(\lambda + \rho, \alpha)(\mu + \rho, \alpha)} = 1 - \frac{(\lambda, \alpha)}{(\lambda + \rho, \alpha)} \frac{(\mu, \alpha)}{(\mu + \rho, \alpha)}$$

On a $(\lambda + \rho, \alpha) = (\lambda, \alpha) + (\rho, \alpha) > (\lambda, \alpha) \geq 0$. On en déduit $Q(\alpha) \leq 1$ pour toute racine positive, donc que $Q = 1$ si et seulement si pour tout α racine positive $(\lambda, \alpha) = 0$ ou $(\mu, \alpha) = 0$, ce qui implique que λ ou μ est nul, i.e. que V ou W est triviale. En effet, on aurait sinon des racines simples α et β telles que $(\lambda, \alpha) \neq 0$, $(\mu, \beta) \neq 0$ d'où $(\lambda, \beta) = (\mu, \alpha) = 0$. Comme $\mathcal{G}$ est simple, son diagramme de Dynkin est connexe, donc on a une suite de racines simples

$$\gamma_0 = \alpha, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k = \beta$$

différentes telles que $(\gamma_i, \gamma_j) \leq 0$ pour tous i, j et $(\gamma_i, \gamma_{i+1}) < 0$. Quitte à prendre le plus court possible parmi de tels chemins on peut supposer $(\lambda, \gamma_i) = (\mu, \gamma_i) = 0$ pour $0 < i < k$. On en déduit que $\gamma = \gamma_0 + \gamma_1 + \dots + \gamma_k$ est une racine positive, d'après les propriétés des systèmes de racines. Or $(\lambda, \gamma) \neq 0$ et $(\mu, \gamma) \neq 0$, ce qui donne la contradiction voulue.

cqfd.

Si $\mathcal{G}$ est une algèbre de Lie simple de dimension finie, i.e. $\mathcal{G} = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{G}_i$, ses représentations irréductibles s'écrivent sous la forme $\bigotimes_{i \in I} \Gamma_{\lambda_i}^i$ où $\Gamma_{\lambda_i}^i$ est la représentation irréductible de $\mathcal{G}_i$ de plus haut poids λ_i . On en déduit que si V et W sont deux représentations irréductibles de $\mathcal{G}$ telles que $V \otimes W$ est irréductible, alors pour tout $i \in I$, $\text{Res}_{\mathcal{G}_i} V$ ou $\text{Res}_{\mathcal{G}_i} W$ est triviale.

Lemme 2. *Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie simple de dimension finie, λ un poids dominant, Γ_λ la représentation irréductible associée, et α une racine simple.*

- 1) *On a toujours $\Gamma_{2\lambda} \hookrightarrow S^2(\Gamma_\lambda)$*
- 2) *Si $\lambda(H_\alpha) \neq 0$, alors $\Gamma_{2\lambda-\alpha} \hookrightarrow \Lambda^2(\Gamma_\lambda)$*
- 3) *Si $\lambda(H_\alpha) > 1$, alors $\Gamma_{2\lambda-2\alpha} \hookrightarrow S^2(\Gamma_\lambda)$*

Preuve — On note (X_i, Y_i, H_i) la base de Weyl de $\mathcal{G}$, v un vecteur de plus haut poids de Γ_λ , et

$$\begin{aligned} w_0 &= v \otimes v \\ w_1 &= (Y_\alpha v) \otimes v - v \otimes (Y_\alpha v) \\ w_2 &= -\lambda(H_\alpha)(Y_\alpha Y_\alpha v) \otimes v - \lambda(H_\alpha)v \otimes (Y_\alpha Y_\alpha v) + 2(\lambda(H_\alpha) - 1)(Y_\alpha v) \otimes (Y_\alpha v) \end{aligned}$$

On a $w_0, w_2 \in S^2(\Gamma_\lambda)$, $w_1 \in \Lambda^2(\Gamma_\lambda)$. Ils sont annulés par les X_i , et pour H élément de l'algèbre de Cartan, $H(w_i) = (2\lambda(H) - i\alpha)w_i$.

Si ces vecteurs sont non nuls, ce sont des vecteurs de plus haut poids correspondant

à des représentations irréductibles différentes de $\mathcal{G}$. Or, dans tous les cas, comme $v \neq 0$, $w_0 \neq 0$, d'où 1). Si $\lambda(H_\alpha) \neq 0$, $X_\alpha(Y_\alpha v) = [X_\alpha, Y_\alpha]v = H_\alpha v = \lambda(H_\alpha)v \neq 0$, d'où $Y_\alpha v \notin \mathbb{C}v$, $w_1 \neq 0$ et 2). Si $\lambda(H_\alpha) > 1$, on a comme précédemment $Y_\alpha v \notin \{v, 0\}$, et de plus $X_\alpha(Y_\alpha Y_\alpha v) = 2(\lambda(H_\alpha) - 1)Y_\alpha v$, donc $v, Y_\alpha v, Y_\alpha Y_\alpha v$ sont linéairement indépendants et $w_2 \neq 0$, d'où 3). cqfd.

Lemme 3. *Chacune des conditions suivantes, dans le cadre du lemme précédent, implique que λ est un poids fondamental ou que Γ_λ est la représentation adjointe de $\mathfrak{sl}_2$.*

- 1) $N(\Gamma_\lambda^{\otimes 2}) = 2$
- 2) $N(\Gamma_\lambda^{\otimes 2}) = 3$ et $1 \hookrightarrow \Gamma_\lambda^{\otimes 2}$

Preuve —

- 1) On écrit $\lambda = \sum_{i=1}^n n_i \omega_i$ où les ω_i sont les poids fondamentaux de $\mathcal{G}$. Comme $\Gamma_\lambda^{\otimes 2}$ n'est pas irréductible, $\lambda \neq 0$ donc il existe un $n_{i_0} = \lambda(H_{\alpha_{i_0}}) \neq 0$. On en déduit $\Gamma_{2\lambda} \oplus \Gamma_{2\lambda - \alpha_{i_0}} = \Gamma_\lambda^{\otimes 2}$. Si on avait $n_j \neq 0$ avec $j \neq i_0$, on aurait une composante irréductible $2\lambda - \alpha_j$, soit $\alpha_j = \alpha_{i_0}$ ou $\alpha_j = 0$, ce qui est exclu. De même, si $n_{i_0} > 1$, on aurait une troisième composante $\Gamma_{2\lambda - 2\alpha_{i_0}}$, donc λ est bien un poids fondamental.
- 2) De la même façon, si λ n'est pas un poids fondamental, on a

$$\begin{aligned} \Gamma_\lambda^{\otimes 2} &= \Gamma_{2\lambda} \oplus \Gamma_{2\lambda - \alpha_i} \oplus \Gamma_{2\lambda - \alpha_j} \\ \Gamma_\lambda^{\otimes 2} &= \Gamma_{2\lambda} \oplus \Gamma_{2\lambda - \alpha_i} \oplus \Gamma_{2\lambda - 2\alpha_i} \end{aligned}$$
 soit
 - a) $2\lambda - \alpha_i = 0$ et $\lambda = \omega_i + \omega_j$
 - b) $2\lambda - 2\alpha_i = 0$, i.e. $\lambda = \alpha_i$, et $\lambda = n_i \omega_i$

Il reste à montrer que ces deux cas ne peuvent se produire :

- a) Dans ce cas, on a $\lambda = \omega_i + \omega_j$, d'où $\alpha_i = 2\omega_i + 2\omega_j$, soit $\alpha(H_{\alpha_j}) = 2 > 0$ ce qui est incompatible avec $\alpha_i \neq \alpha_j$.
- b) On a $\lambda = n_i \omega_i$ et $2\lambda = 2\alpha_i$ soit $\alpha_i = n_i \omega_i$. Pour $j \neq i$, on a donc $\alpha_i(H_{\alpha_j}) = 0$, ce qui contredit la connexité du diagramme de Dynkin, i.e. la simplicité de $\mathcal{G}$, sauf si $\mathcal{G}$ n'a qu'une racine simple. Dans ce cas, $\mathcal{G} = A_1$ et $\lambda = 2\omega_1$, ce qui correspond à la représentation adjointe de $\mathfrak{sl}_2$.

cqfd.

3. ETUDE DES POIDS FONDAMENTAUX

3.1. Groupes exceptionnels. Le nombre de composantes irréductibles des carrés symétriques et alternés d'un poids fondamental, pour $\mathcal{G}$ exceptionnel, a été calculé à l'aide du programme [LiE], version 2.2. La ligne " S^2 " (resp. " Λ^2 ", " $V^{\otimes 2}$ ") indique le nombre de composantes irréductibles du carré symétrique (resp. alterné, tensoriel) du poids fondamental ω_i . La ligne "type" indique "O" pour une représentation orthogonale, "S" pour symplectique, et indique la représentation duale sinon. Les poids fondamentaux sont numérotés dans l'ordre de Bourbaki [Bou].

E_6	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
S^2	2	3	6	21	6	2
Λ^2	1	2	4	17	4	1
type	ω_6	O	ω_5	O	ω_3	ω_1
$V^{\otimes 2}$	3	5	10	38	10	3

F_4	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
S^2	3	17	10	3
Λ^2	2	14	8	2
type	O	O	O	O
$V^{\otimes 2}$	5	31	18	5

E_7	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7
S^2	3	5	16	124	28	8	2
Λ^2	2	5	14	118	28	6	2
<i>type</i>	O	S	O	O	S	O	S
$V^{\otimes 2}$	5	10	30	242	56	14	4

G_2	ω_1	ω_2
S^2	2	3
Λ^2	2	2
<i>type</i>	O	O
$V^{\otimes 2}$	4	5

E_8	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8
S^2	6	20	121	5396	640	88	15	3
Λ^2	4	17	112	5334	619	80	12	2
<i>type</i>	O	O	O	O	O	O	O	O
$V^{\otimes 2}$	10	37	233	10730	1259	168	27	5

3.2. Groupes classiques.

3.2.1. *Groupes de type A.* On note $\omega_1, \dots, \omega_n$ les poids fondamentaux de A_n . On a $\omega_i^* = \omega_{n+1-i}$. En particulier, le seul cas où un poids fondamental peut être autodual est celui de ω_p dans A_{2p-1} . Alors, ω_p correspond à la représentation $\Lambda^p(V)$, où V est la représentation standard, de dimension $2p$. L'isomorphisme $\Lambda^{2p}(V) \simeq \mathbb{C}$ induit une forme quadratique

$$(x_1 \wedge \dots \wedge x_p, y_1 \wedge \dots \wedge y_p) = x_1 \wedge \dots \wedge x_p \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_p$$

On a alors $(x, y) = (-1)^{p^2} (y, x) = (-1)^p (x, y)$. Cette représentation est donc orthogonale si p est pair, symplectique sinon.

Enfin, la règle de Littlewood-Richardson (cf [McD]) montre que les représentations irréductibles associées aux poids fondamentaux ω_i , $i \leq n/2$, admettent exactement $i + 1$ composantes irréductibles dans leur carré tensoriel. L'identité $\omega_i^* = \omega_{n+1-i}$ montre que la situation est symétrique pour $i > n/2$.

3.2.2. *Groupes orthosymplectiques.* Dans les cas B, C , et D , les poids fondamentaux non spinoriels, qui sont tous autoduaux, peuvent être obtenus par la construction de Weyl, et ils correspondent aux mêmes diagrammes de Young que les poids fondamentaux de A_n . En particulier, le diagramme λ_i associé à un tel ω_i est de taille $|\lambda_i| = i$. Si V_λ est la représentation non spinorielle associée à λ , et $N(V_\lambda^{\otimes 2})$ le nombre de composantes irréductibles de $V_\lambda^{\otimes 2}$, on a

Lemme 4.

$$N(V_\lambda^{\otimes 2}) \geq \#\{\sigma \mid \sigma \subset \lambda\} \geq |\lambda| + 1$$

Preuve — Si l'on note $N_{\lambda\mu\nu}$ la multiplicité de V_ν dans $V_\lambda \otimes V_\mu$, et $L_{\lambda\mu\nu}$ est le coefficient de Littlewood-Richardson, on a d'après une formule de Littlewood [Lwd]

$$N_{\lambda\lambda\nu} = \sum_{\zeta\sigma\tau} L_{\zeta\sigma\lambda} L_{\zeta\tau\lambda} L_{\sigma\tau\nu} \geq \sum_{\zeta\sigma} (L_{\zeta\sigma\lambda})^2 L_{\sigma\sigma\nu}$$

Si on choisit σ de taille $i < |\lambda|$ tel que $\sigma \subset \lambda$, on peut toujours trouver ζ tel que $L_{\zeta\sigma\lambda} \neq 0$, et $\nu(\sigma)$ tel que $L_{\sigma\sigma\nu(\sigma)} \neq 0$. On en déduit :

$$N(V_\lambda^{\otimes 2}) = \sum_{\nu} N_{\lambda\lambda\nu} \geq \#\{\sigma \mid \sigma \subset \lambda\} \geq |\lambda| + 1$$

cqfd.

En particulier, si le nombre de représentations irréductibles dans $V_\lambda^{\otimes 2}$ est au plus 3, λ est de taille 0,1, ou 2. Si $\lambda = 0$, on n'a qu'une composante irréductible, si $\lambda = 1$ il y en a 3 dont une triviale, si λ est de taille 2 la même formule montre qu'il y a au moins 4 composantes irréductibles. En particulier, pour les représentations irréductibles non spinorielles

$$\begin{aligned} \forall \lambda \quad N(V_\lambda^{\otimes 2}) &\neq 2 \\ N(V_\lambda^{\otimes 2}) = 3 &\Rightarrow \lambda = [1] \end{aligned}$$

Si W correspond au poids fondamental spinoriel de B_n , et si V désigne la représentation standard, on a la formule classique ([FH] ext 19.16, [KN])

$$W \otimes W \simeq \Lambda^n(V) \oplus \Lambda^{n-1}(V) \oplus \dots \oplus \Lambda^1(V) \oplus \Lambda^0(V)$$

c'est à dire que $W^{\otimes 2}$ admet $n + 1$ composantes irréductibles. D'autre part, W est orthogonale.

Si $W = \Gamma_\alpha$ est maintenant l'un des deux poids fondamentaux spinoriels de D_n , et V la représentation standard de D_n , on a ([FH] ex 19.6, [KN])

$$W \otimes W \simeq \Gamma_{2\alpha} \oplus \Lambda^{n-2}V \oplus \Lambda^{n-4}V \oplus \dots \oplus \Lambda^{n-2E(n/2)}V$$

donc $W^{\otimes 2}$ admet $E(n/2) + 1$ composantes irréductibles.

D'autre part, si n est pair les deux poids fondamentaux spinoriels de D_n sont duaux l'un de l'autre. Ils sont autoduaux si n est impair.

4. REPRÉSENTATIONS STANDARD

Les algèbres $\mathfrak{sl}_n$, $\mathfrak{so}_n$ et $\mathfrak{sp}_n$ agissent de manière irréductible sur $\mathbb{C}^n$, que l'on a l'habitude d'appeler représentation standard de chacune des algèbres de Lie simples considérées. Cette notion n'est pas canonique dans la mesure où elle n'est pas invariante par le groupe des automorphismes du diagramme de Dynkin, elle ne peut donc déterminer qu'une orbite dans l'ensemble des représentations. On appellera représentation standard tout élément de cette orbite.

Soit V une représentation d'une algèbre de Lie simple $\mathcal{G}$. On rappelle que V est dite de type (p, q) si le carré symétrique (resp. alterné) de V admet p (resp. q) composantes irréductibles. On a alors

Proposition 1. *Si V est une représentation d'une algèbre de Lie simple $\mathcal{G}$,*

- *si V est de type $(1, 0)$, V est une représentation triviale*
- *si V est de type $(1, 1)$, V est représentation standard de $\mathfrak{sl}_n$*
- *si V est de type $(2, 1)$ et $V \simeq V^*$, V est représentation standard de $\mathfrak{so}_n$*
- *si V est de type $(1, 2)$ et $V \simeq V^*$, V est représentation standard de $\mathfrak{sp}_n$*

Preuve — La première assertion est évidente. On suppose désormais que V n'est pas triviale. Sous les hypothèses restantes, V est irréductible: sinon, $V \otimes V$ aurait au moins quatre composantes, par distributivité du produit tensoriel. On traite à part le cas $\mathcal{G} = \mathfrak{sl}_2$. La formule de Clebsch-Gordan montre que si V est de type $(1, 1)$, V est représentation standard de $\mathfrak{sl}_2$. Si V est de type $(2, 1)$, V est la représentation adjointe de $\mathfrak{sl}_2$, c'est-à-dire la représentation standard de $\mathfrak{so}_3 = B1$. On peut maintenant supposer $\mathcal{G} \neq \mathfrak{sl}_2$, donc $\dim V > 2$, donc V est associée à un poids fondamental λ , d'après le lemme 3. On considère le cas $(1, 1)$. Comme $\dim V > 2$, V ne peut être autoduale. $\mathcal{G}$ n'est donc pas exceptionnelle. Si $\mathcal{G}$ est de type B , C ou D , V est alors représentation spinorielle de D_n , donc a $E(n/2) + 1$ composantes irréductibles. Cela n'est possible que si $n = 3$, ce qui correspond à l'isomorphisme $A3 \simeq D3$. $\mathcal{G}$ est donc de type A_n , et V correspond aux poids fondamentaux ω_1 ou ω_n , soit à l'une des deux représentations standard.

Si V est de type $(2, 1)$ et autoduale et $\mathcal{G}$ de type A : V correspond aux poids fondamentaux ω_2 ou ω_{n-1} , qui devraient être égaux puisque V est autoduale. On en déduit $\mathcal{G} = A3 = D3$. Les tables montrent que $\mathcal{G}$ n'est pas exceptionnelle. On en déduit que $\mathcal{G}$ est de type B, C ou D . Comme $V^{\otimes 2}$ a trois composantes irréductibles, si elle n'est pas spinorielle, elle correspond au poids ω_1 , qui est symplectique pour C_n , orthogonale pour B_n, D_n : cela règle le dernier cas. Si elle est spinorielle, et $\mathcal{G} = B_n$, alors $n = 2$. Or, dans le cas de $B2$, la représentation spinorielle s'identifie à la représentation standard de $C2$, qui est symplectique. Si $\mathcal{G} = D_n$, et V spinorielle, comme $V^{\otimes 2}$ a trois composantes irréductibles, $E(n/2) + 1 = 3$, soit $\mathcal{G} \in \{D4, D5\}$. Or les représentations spinorielles de $D5$ ne sont pas autoduales, et celles de $D4$ sont des représentations standard. cqfd.

Remarques :

- 1) On ne peut enlever les hypothèses $V \simeq V^*$. Par exemple, dans le cas $(2, 1)$, on a des poids fondamentaux solutions pour $\mathcal{G} \in \{A5, E6, D5\}$. Dans le cas $(1, 2)$, le poids $2\omega_1$ de A_n pour $n \geq 2$ donne également des solutions non autoduales.

- 2) On a une preuve élémentaire de la proposition précédente :

si $N(V \otimes V) \in \{1, 2, 3\}$, on a

$$\begin{aligned} N(V \otimes V) &= \dim \text{End}_{\mathcal{G}}(V \otimes V) = \dim(V \otimes V \otimes V^* \otimes V^*)^{\mathcal{G}} \\ &= \dim(V \otimes V^* \otimes V^* \otimes V)^{\mathcal{G}} = \dim \text{End}_{\mathcal{G}}(V \otimes V^*) \\ &= N(V \otimes V^*) \end{aligned}$$

On a donc $N(V \otimes V) = N(\mathfrak{gl}(V)) = 2$. Or si V n'est pas la représentation triviale, $\mathcal{G} \subset \mathfrak{gl}(V)$. Comme $\mathcal{G}$ est simple, $\mathcal{G} \subset \mathfrak{sl}(V)$. Si $N(V \otimes V) = 2$, $\mathfrak{sl}(V)$ est irréductible donc $\mathcal{G} = \mathfrak{sl}(V)$. Si V est de type $(2, 1)$ (resp. de type $(2, 1)$), on a une forme quadratique symétrique (resp. antisymétrique) $\mathcal{G}$ -invariante sur $\mathfrak{gl}(V) = V \otimes V$, donc $\mathcal{G} \subset \Lambda^2(V)$ (resp. $\mathcal{G} \subset S^2(V)$), et par irréductibilité de $\Lambda^2(V)$ (resp. $S^2(V)$), $\mathcal{G} = \Lambda^2(V) = \mathfrak{so}(V)$ (resp. $\mathcal{G} = S^2(V) = \mathfrak{sp}(V)$). On a ainsi déterminé les algèbres de Lie. Il reste à montrer que V est alors représentation standard : si l'on note $W = \mathbb{C}^n$ la représentation standard traditionnelle de $\mathcal{G}$, on a $\mathfrak{sl}(V) \simeq \mathfrak{sl}(W)$ (resp. $\mathfrak{so}(V) \simeq \mathfrak{so}(W)$, $\mathfrak{sp}(V) \simeq \mathfrak{sp}(W)$), donc on a un isomorphisme d'espaces vectoriels de W vers V , qui induit un automorphisme de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$. V est donc la représentation image de W par un automorphisme de $\mathcal{G}$. On sait (cf. [Bou]) que les groupes des automorphismes de $\mathcal{G}$ est produit semi-direct des automorphismes internes (qui laissent invariants les classes d'isomorphie des représentations) par le groupe des automorphismes du diagramme de Dynkin : on en déduit que V est une représentation standard de $\mathcal{G}$ au sens précédemment défini.

5. APPLICATION AUX ALGÈBRES DE LIE SEMI-SIMPLES

On considère $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie semi-simple complexe.

Définition 1. On appelle système classique pour $\mathcal{G}$ la donnée d'une collection $((L_i)_{i \in I_1}, (O_i)_{i \in I_2}, (S_i)_{i \in I_3})$ de représentations de $\mathcal{G}$ distinctes deux à deux, qui vérifient les conditions

- C1) Pour tous i et j , $L_i \otimes O_j$, $L_i \otimes S_j$ et $O_i \otimes S_j$ sont irréductibles
- C2) Pour tous i et j distincts, $L_i \otimes L_j$, $O_i \otimes O_j$ et $S_i \otimes S_j$ sont irréductibles
- C3) Pour tous i , L_i est de type $(1, 1)$, O_i est de type $(2, 1)$, S_i est de type $(1, 2)$ et $O_i \simeq O_i^*$, $S_i \simeq S_i^*$, et $\dim O_i \geq 4$.

Pour un tel système classique, on pose $l_i = \dim L_i$, $o_i = \dim O_i$ et $s_i = \dim S_i$.

Proposition 2. *Si $\mathcal{G}$ algèbre de Lie semi-simple complexe admet un système classique, on peut décomposer*

$$\mathcal{G} \simeq \mathcal{G}_{cl} \times \tilde{\mathcal{G}}$$

où $\tilde{\mathcal{G}}$ est une algèbre de Lie semi-simple et où

$$\mathcal{G}_{cl} = \left(\bigoplus_{i \in I_1} \mathfrak{sl}_{l_i} \right) \times \left(\bigoplus_{i \in I_2} \mathfrak{so}_{o_i} \right) \times \left(\bigoplus_{i \in I_3} \mathfrak{sp}_{s_i} \right)$$

Preuve — $\mathcal{G}$ est semi-simple, donc on peut écrire $\mathcal{G} \simeq \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{G}_i$ avec $\mathcal{G}_i$ simple pour tout i . Chacune des représentations du système classique est irréductible (leur carré tensoriel a moins de 4 composantes irréductibles), donc correspond à un produit de $\mathcal{G}_i$, au sens où l'on peut écrire, pour V représentation irréductible de $\mathcal{G}$,

$$V = \bigotimes_{i \in \mathcal{I}} V_i$$

avec V_i représentation irréductible de $\mathcal{G}_i$. Cela permet d'associer à V l'ensemble $\Phi(V)$ des éléments i de $\mathcal{I}$ tels que V_i soit non triviale ($\dim V_i > 1$). Les conditions C1) et C2) montrent que l'on peut appliquer le lemme 1: ces ensembles, pour les différentes représentations irréductibles considérées, sont disjoints. La condition C3) implique qu'aucune de ces représentations n'est triviale. On note $(\mathcal{G}_l)_i$ (resp. $(\mathcal{G}_o)_i$, $(\mathcal{G}_s)_i$) le produit des $\mathcal{G}_k$ tels que $k \in \Phi(L_i)$ (resp. $\Phi(O_i)$, $\Phi(S_i)$). On peut donc, en regroupant les termes, écrire

$$\mathcal{G} \simeq \mathcal{G}_l \times \mathcal{G}_o \times \mathcal{G}_s \times \mathcal{G}'$$

où l'on a fait le produit des $(\mathcal{G}_*)_i$ pour obtenir $(\mathcal{G}_*)$.

Les $(\mathcal{G}_*)_i$ sont simples, car sinon la représentation correspondante serait produit de deux représentations non triviales, donc son carré tensoriel aurait au moins 4 composantes irréductibles (contredisant C3)). On déduit de la proposition 1 que les représentations irréductibles du système classique sont des représentations standard des algèbres de Lie simples qui leur ont été associées, d'où

$$(\mathcal{G}_l)_i \simeq \mathfrak{sl}_{l_i}, (\mathcal{G}_o)_i \simeq \mathfrak{so}_{o_i}, (\mathcal{G}_s)_i \simeq \mathfrak{sp}_{s_i}$$

cqfd.

RÉFÉRENCES

- [FH] William Fulton et Joe Harris, *Representation theory. A first course*, Graduate Texts in Mathematics, 129, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [KN] George Kempf et Linda Ness, *Tensor products of fundamental representations*, Can. J. Math. vol XL n° 3 (1988) pp 633-648.
- [Lwd] D.E. Littlewood, *Products and plethysms of characters with orthogonal, symplectic and symmetric groups* Can. J. Math. 10, pp 17-32 (1958)
- [LiE] Marc A.A. van Leeuwen, Arjeh M. Cohen et Bert Lisser, *LiE, A software package for Lie group computations* Computer algebra group of CWI, Amsterdam
- [McD] Ian G. MacDonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, Clarendon Press 1995 (pour la deuxième édition).
- [Bou] Nicolas Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, ch. 4-6, Hermann, Paris 1968.

Ivan Marin
DMI, Ecole Normale Supérieure
F-75005 PARIS
marin@dmi.ens.fr