# Quotients infinitésimaux du groupe de tresses

Ivan Marin

2 novembre 2001

**Abstract.** We define and study infinitesimal analogues of the main quotients of the group algebra of the Artin's groups, namely the Temperly-Lieb, Hecke and Birman-Wenzl-Murakami algebras, in terms of KZ-systems. These analogues are Hopf algebras which correspond to reductive groups : we give then a general framework for the study of representations deduced from the classical representations of $B_n$ through tensor constructions. We use this to analyse representations related to the Burau representation, and we fully decompose the infinitesimal Temperly-Lieb algebra. As a by-product, we obtain several irreducibility properties.

## 1 Introduction

On fixe $n \geq 1$, et on considère le groupe de tresses d'Artin $B_n$, son groupe de tresses pures $P_n$, et le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$. Tous les corps considérés sont commutatifs et de caractérisque 0. Toutes les représentations, tous les $A$-modules pour $A$ une algèbre sur un corps commutatif $\mathbb{k}$, sont supposés de dimension finie sur le corps de base.

Il est classique que $P_n$ est le $\pi_1$ de $\mathbb{C}_*^n$, espace de configuration des $n$-uplets de complexes deux à deux distincts, dont on fixe un point base une fois pour toutes. Toute représentation de $P_n$ est donc l'holonomie d'un fibré vectoriel sur $\mathbb{C}_*^n$ muni d'une connexion plate. Un théorème de Kohno [18] utilisant des arguments de Hain [13] affirme qu'il se produit pour $P_n$ un phénomène comparable au résultat classique de Lappo-Danilevskii [20] sur le groupe libre : pour toute représentation de $P_n$ suffisamment proche de la représentation triviale, le fibré vectoriel associé est trivialisable. En d'autres termes, les représentations proches de la représentation triviale de $P_n = \pi_1(\mathbb{C}_*^n)$ proviennent par monodromie d'équations différentielles des représentations d'une algèbre de Lie $\mathcal{T}_n$, dite des tresses infinitésimales pures, qui est l'algèbre de Lie du $\pi_1$ « de Rham » de $\mathbb{C}_*^n$.

Il se trouve que cette algèbre de Lie agit naturellement sur les produits tensoriels $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$ de $\mathfrak{g}$-modules, notamment quand $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie semi-simple : la raison profonde de ce phénomène a été exposée par Drinfeld [8]. La monodromie d'une telle représentation est une représentation de $P_n$ qui commute à l'action du groupe quantique $\mathsf{U}_q\mathfrak{g}$ sur $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$. Si l'on suppose de plus que $V_1 = V_2 = \ldots = V_n$, l'action de $\mathfrak{S}_n$ par permutation des facteurs permet en fait de construire un fibré vectoriel plat sur $\mathbb{C}_*^n/\mathfrak{S}_n$, donc une représentation de $\pi_1(\mathbb{C}_*^n/\mathfrak{S}_n) = B_n$. On peut plus généralement construire une algèbre de Hopf $\mathfrak{t}_n$, dite des tresses infinitésimales, dont l'idée remonte à Drinfeld [9], et dont les représentations permettent d'obtenir par monodromie des représentations de $B_n$.

Si l'on quitte l'optique des groupes quantiques, on peut donc tâcher d'utiliser $\mathfrak{t}_n$ pour mieux comprendre les représentations connues du groupe de tresses $B_n$, ou même pour en construire de nouvelles (cf. [23]). On pourra trouver dans [22] un procédé systématique de recherche et de construction explicite de représentations irréductibles de $B_n$ à partir de représentations de $\mathfrak{S}_n$, qui utilise ce point de vue. L'idée centrale pour tirer parti de $\mathfrak{t}_n$ est que les représentations irréductibles de $\mathfrak{t}_n$ permettent de construire des représentations encore irréductibles de $B_n$ (prop. 1, 3.3), et que les filtrations naturelles de groupes (resp. d'algèbres unitaires)

$$\begin{array}{ccccccccc} \{e\} & = & B_1 & \subset & B_2 & \subset & \ldots & \subset & B_n \\ \mathbb{k} & = & \mathfrak{t}_1 & \subset & \mathfrak{t}_2 & \subset & \ldots & \subset & \mathfrak{t}_n \end{array}$$

sont compatibles pour les opérations de restriction (lemme 2, 3.3). D'autre part, les structures d'algèbres de Hopf de $\mathfrak{t}_n$ et $B_n$ sont compatibles, au sens où le produit tensoriel $M \otimes N$ de deux $\mathfrak{t}_n$-modules donnera lieu à un produit tensoriel de représentations de $B_n$, qui sera irréductible si $M \otimes N$ l'est. Cette approche permet de simplifier grandement le problème de la décomposition du produit tensoriel de deux représentations de $B_n$, notamment celui de son éventuelle irréductibilité (cf. [22]).

L'importance des représentations du groupe de tresses est notamment liée au fait qu'elles permettent de construire des invariants de nœuds. Les polynômes d'Alexander, de Jones, H.O.M.F.L.Y. et de Kauffmann proviennent tous de quotients de l'algèbre de groupe de $B_n$, respectivement des algèbres de Burau (cf. plus loin), de Temperly-Lieb, de Hecke, et de Birman-Wenzl-Murakami. Ces algèbres dépendent d'au moins un paramètre, et sont des algèbres semi-simples de dimension finie, au moins pour des valeurs génériques de ces paramètres (c'est le seul cas que nous considèrerons ici). Malheureusement, il n'y a pas sur ces algèbres de structure de bigèbre compatible avec la projection de l'algèbre de groupe de $B_n$, ce qui interdit de se servir de ces algèbres pour étudier les produits tensoriels de telles représentations. Nous montrons ici que ces algèbres sont liées par monodromie à des *quotients de Hopf* de $\mathfrak{t}_n$ (section 3), que l'on considère comme des versions infinitésimales de ces algèbres. Nous montrons de plus (théorème 1) que ces algèbres sont des produits semi-directs de l'algèbre de groupe de $\mathfrak{S}_n$ par les algèbres enveloppantes d'algèbres de Lie *réductives* et *déployables*. Pour montrer ce dernier point, nous avons besoin d'établir un résultat nouveau sur l'algèbre de Brauer (théorème 4), dont nous reportons la démonstration en appendice. Il s'agit alors de décomposer en facteurs simples ces dernières pour mieux comprendre ces quotients classiques de $\mathbb{k}B_n$. Comme, de plus, ces versions ont l'avantage, contrairement à leurs homologues classiques, d'être munies d'une structure d'algèbre de Hopf, l'accomplissement d'un tel programme permet de résoudre complètement, dans le cas « générique », la décomposition en irréductibles du produit tensoriel de deux représentations d'une de ces algèbres.

Dans le cas de ce que nous appelons l'algèbre de Burau, c'est-à-dire l'image de $\mathbb{k}B_n$ dans la représentation de Burau (réduite), nous montrons (théorème 2) que l'algèbre de Burau infinitésimale est un produit semi-direct de $\mathbb{k}\mathfrak{S}_n$ et de $\mathfrak{sl}_{n-1}(\mathbb{k})$, c'est-à-dire que c'est une version « infinitésimale » d'un produit semi-direct $\mathfrak{S}_n \ltimes SL_{n-1}(\mathbb{k})$. Les représentations dérivées de la représentation de Burau, c'est-à-dire celles que l'on obtient en appliquant des foncteurs de Schur, sont alors génériquement irréductibles, et l'on sait décomposer leurs produits tensoriels deux à deux suivant la règle de Littlewood-Richardson.

Comme on l'a déjà mentionné, la décomposition du produit tensoriel de deux $\mathfrak{t}_n$-modules est généralement plus aisée que la décomposition du produit tensoriel de deux $B_n$-modules. A partir de telles décompositions obtenues dans [22], nous obtenons une décomposition complète de l'algèbre de Temperly-Lieb infinitésimale (théorème 3). Nous utilisons pour ce faire une méthode de reconstruction des algèbres de Lie semi-simples à partir des propriétés tensorielles de leurs représentations standard, que nous avions esquissée dans [21], et qui est basée sur des résultats généraux que nous exposons en section 6.

Pour compléter ce programme, il resterait à décomposer complètement les algèbres de Hecke et de Birman-Wenzl-Murakami infinitésimales. Nous exposons en conclusion les résultats que nous avons obtenus pour de faibles valeurs de $n$, et montrons comment l'on peut « lire » une sous-algèbre de Cartan à partir des représentations des algèbres correspondantes, dans les cas que nous avons analysés.

# 2 Préliminaires

Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2, $B_n$ le groupe de tresses à $n$ brins, et $\mathfrak{S}_n$ le groupe symétrique sur $n$ lettres. Rappelons que $B_n$ admet une présentation par $n-1$ générateurs notés $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ et relations

$$\left\{ \begin{array}{lcll} \sigma_i\sigma_j & = & \sigma_j\sigma_i & |j-i| \geq 2 \\ \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i & = & \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} & 1 \leq i \leq n-2 \end{array} \right.$$

de telle façon que l'application $\sigma_i \mapsto (i\ i{+}1)$ se prolonge en un morphisme surjectif $\pi : B_n \to \mathfrak{S}_n$. Une présentation alternative de $B_n$ a été récemment introduite par Birman, Ko et Lee [1] : les générateurs sont notés $a_{ji}$ pour $1 \leq i < j \leq n$, et sont soumis aux relations

$$\left\{ \begin{array}{ll} a_{ij}a_{kl} = a_{kl}a_{ij} & \text{si } (i-k)(i-l)(j-k)(j-l) > 0 \\ a_{kj}a_{ji} = a_{ki}a_{kj} = a_{ji}a_{ki} & \text{si } n \geq k > j > i \geq 1 \end{array} \right.$$

C'est cette présentation que nous utilisons ici. On montre facilement que, sous ces relations, les éléments $a_{ji}$ de $B_n$ sont conjugués ; en particulier, ils ont mêmes invariants de similitude dans toute représentation. Le lien avec la présentation d'Artin est donnée par

$$a_{ji} = (\sigma_{j-1}\sigma_{j-2}\dots\sigma_{i+1})\sigma_i(\sigma_{i+1}^{-1}\dots\sigma_{j-2}^{-1}\sigma_{j-1}^{-1})$$

et, en particulier, $a_{i+1,i} = \sigma_i$. On a $\pi(a_{ji}) = (j\ i) = (i\ j)$.

Le noyau de ce morphisme $\pi$ est le groupe de tresses pures $P_n$. En d'autres termes, on a une suite exacte

$$1 \to P_n \to B_n \to \mathfrak{S}_n \to 1.$$

L'une des principales difficultés dans l'étude des représentations linéaires de $B_n$ provient de ce que cette suite exacte n'est pas scindée. On sait depuis longtemps classifier les représentations de $\mathfrak{S}_n$, et l'on sait construire des représentations du groupe de tresses pures $P_n$ à partir de systèmes de Knizhnik-Zamolodchikov. Nous rappelons brièvement cette construction.

On note $\mathbb{C}^n_*$ l'espace des configurations

$$\mathbb{C}^n_* = \{(z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{C}^n \ \mid\ z_i \neq z_j \Leftrightarrow i \neq j\},$$

qui est un espace d'Eilenberg-MacLane classique du groupe de tresses pures. A un espace vectoriel $V$ de dimension finie sur $\mathbb{C}$ on associe le fibré trivial $F_V : \mathbb{C}^n_* \times V \to \mathbb{C}^n_*$. On considère les 1-formes sur $\mathbb{C}^n_*$ à valeurs dans $\mathfrak{gl}(V)$, l'algèbre de Lie des endomorphismes de $V$, qui s'écrivent

$$\omega = \frac{1}{\mathrm{i}\pi}\sum_{i<j}\Omega_{ij}\mathrm{d}log(z_i - z_j)$$

pour $\Omega_{ij}$ une famille d'endomorphismes de $V$. Si l'on introduit l'algèbre de Lie (graduée) $\mathcal{T}_n$ définie sur $\mathbb{Q}$ par générateurs $t_{ij}$ pour $1 \leq i,j \leq n$ (de degré 1) et relations (homogènes)

$$\left\{ \begin{array}{lll} t_{ij} = t_{ji} & t_{ii} = 0 & \\ [t_{ij}, t_{kl}] & = \ 0 & \text{si } \#\{i,j,k,l\} = 4 \\ [t_{ij}, t_{ik} + t_{kj}] & = \ 0 & \end{array} \right.$$

et si l'on pose par convention $\Omega_{ij} = \Omega_{ji}$, $\Omega_{ii} = 0$, la condition d'intégrabilité de $\omega$ signifie qu'existe une représentation $\mathbb{Q}$-linéaire

$$\rho : \mathcal{T}_n \to \mathfrak{gl}(V)$$

telle que $\rho(t_{ij}) = \Omega_{ij}$ (cf. par exemple Kassel [16]). Inversement, si une telle représentation de $\mathcal{T}_n$ est donnée, on en déduit une 1-forme intégrable et une connection plate sur $F_V$, donc une action par monodromie de $P_n = \pi_1(\mathbb{C}^n_*)$ sur la fibre $V$. A isomorphisme de représentations près, cette action ne dépend pas du point base, et un théorème de Kohno (cf. Kohno [18]) affirme que toute représentation de $P_n$ suffisamment proche de la représentation triviale s'obtient de cette manière. A bien des égards, cette algèbre de Lie $\mathcal{T}_n$, dite des tresses infinitésimales pures, peut être considérée comme l'algèbre de Lie du groupe de tresses pures $P_n$ (cf. Kohno [17] [19], Deligne [6]).

On fixe plus généralement un corps $\mathbb{k}$ de caractéristique 0. Nous rappelons maintenant la définition des principaux quotients de $\mathbb{k}B_n$. Les algèbres de Hecke $H_n(q)$ et de Birman-Wenzl-Murakami $BMW_n(\alpha,s)$ sont définies, pour $q,\alpha,s \in \mathbb{k}$, par les mêmes générateurs $a_{ji}$, et par les mêmes relations que $\mathbb{k}B_n$, auquelles on ajoute

- pour $H_n(q)$ :

$$(a_{ji} - q)(a_{ji} + q^{-1}) = 0.$$

- pour $BMW_n(\alpha, s)$ :

$$(a_{ji} - s)(a_{ji} + s^{-1})(a_{ji} - \alpha^{-1}) = 0$$

$$\left(1 - \frac{a_{32} - a_{32}^{-1}}{s - s^{-1}}\right) a_{21}^{\pm 1} \left(1 - \frac{a_{32} - a_{32}^{-1}}{s - s^{-1}}\right) = \alpha^{\pm 1} \left(1 - \frac{a_{32} - a_{32}^{-1}}{s - s^{-1}}\right)$$

Comme nous l'avons déjà évoqué, ces algèbres sont, dans les cas génériques, de dimension finie et semi-simples. Ce sont en fait des produits d'algèbres de matrices sur $\mathbb{k}$, et il est classique que $H_n(q)$ est isomorphe à $\mathbb{k}\mathfrak{S}_n$. Rappelons que les représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_n$ sont définies sur $\mathbb{Q}$, et qu'on les paramètre par des partitions de $n$, identifiées à des diagrammes de Young de taille $n$. Pour nous, la représentation triviale de dimension 1 de $\mathfrak{S}_n$ correspondra à la partition $[n]$, et nous choisissons comme convention sur les diagrammes de Young

$$[3,2] = \ydiagram{1,2,2}.$$

En particulier, le diagramme de Young ci-dessus a 2 colonnes et 3 lignes.

La représentation de Burau (réduite) se factorise par $H_n(q)$, c'est la représentation qui correspond à la partition $[n-1,1]$. Nous appelons *algèbre de Burau* le facteur simple de $H_n(q)$ correspondant, c'est-à-dire l'image de $H_n(q)$, donc de $\mathbb{k}B_n$, dans les endomorphismes de ce $\mathbb{k}$-espace vectoriel. L'algèbre de Temperly-Lieb $TL_n(q)$ admet une présentation par générateurs et relations relativement simple, qui consiste à ajouter aux relations de $H_n(q)$ la relation suivante, apparemment due à Steinberg (cf. [10]) :

$$1 - a_{21} - a_{32} + a_{32}a_{21} + a_{21}a_{32} - a_{21}a_{32}a_{21} = 0.$$

On peut également la décrire sous forme d'une algèbre de diagrammes. Elle s'identifie en fait à un facteur de $H_n(q)$, qui correspond à l'ensemble des diagrammes de Young de taille $n$ ayant au plus deux colonnes. De la même façon que $H_n(1) = \mathbb{k}\mathfrak{S}_n$, $TL_n(1)$ s'identifie au facteur semi-simple de $\mathbb{k}\mathfrak{S}_n$ qui correspond à la collection des diagrammes de Young à deux colonnes.

Pour $n = 3$ (ainsi que pour $n = 4$ et, conjecturalement, $n = 5$), il est notable que, pour $\alpha$ et $s$ génériques, l'algèbre déduite de $\mathbb{k}B_n$ en ajoutant simplement la relation

$$(a_{ji} - s)(a_{ji} + s^{-1})(a_{ji} - \alpha^{-1}) = 0,$$

est encore de dimension finie et semi-simple. C'est en effet l'algèbre de Hecke cyclotomique générique associée au groupe de réflexions complexes $G_4$ (cf. Broué-Malle [4]). On peut désigner les représentations irréductibles de cette algèbre par $A_{\alpha^{-1}}$, $A_s$, $A_{-s^{-1}}$, $B_{\alpha^{-1},s}$, $B_{\alpha^{-1},-s^{-1}}$, $B_{s,-s^{-1}}$ et $C$, de telle façon que chaque $A_\omega$ (resp. $B_{\omega,\omega'}$, $C$) soit de dimension 1 (resp. 2, 3), et telle que le spectre de chaque $a_{ji}$ sur $A_\omega$ (resp. $B_{\omega,\omega'}$, $C$) soit $\{\omega\}$ (resp. $\{\omega,\omega'\}$, $\{s, -s^{-1}, \alpha\}$). L'algèbre $BMW_3(\alpha, s)$ s'identifie à un facteur direct de cette algèbre de Hecke cyclotomique de la façon suivante

$$BMW_3(\alpha, s) \simeq \mathrm{End}(A_s) \times \mathrm{End}(A_{-s^{-1}}) \times \mathrm{End}(B_{s,-s^{-1}}) \times \mathrm{End}(C).$$

En particulier, si la restriction à $B_3$ d'une représentation de $B_n$ se factorise par l'algèbre de Hecke cyclotomique de $G_4$, il suffit de déterminer sur les composantes irréductibles de cette restriction le spectre des générateurs pour savoir si cette représentation de $B_n$ se factorise par $BMW_n(\alpha, s)$.

# 3 Tresses infinitésimales

Dans cette section, nous construisons les objets annoncés dans l'introduction, et nous établissons les propriétés qui les rendent dignes d'intérêt. En 3.1, nous exposons la théorie générale qui nous sert ici. En 3.2, nous l'appliquons à la construction de l'algèbre de Hopf des tresses infinitésimales. En 3.3 nous montrons, d'une part, que les représentations irréductibles de cette algèbre donnent génériquement lieu à des représentations irréductibles du groupe de tresses. D'autre part, que les représentations des algèbres de Temperly-Lieb, Hecke et Birman-Wenzl-Murakami sont la monodromie de représentations de cette algèbre des tresses infinitésimales. Cela nous amène, en 3.5, à la construction des « quotients infinitésimaux du groupe de tresses » correspondants, qui sont des algèbres de Hopf produits semi-directs de $\mathbb{k}\mathfrak{S}_n$ par une algèbre de Lie réductive, qui est de plus déployable.

## 3.1 Produits semi-directs

On fixe un corps $\mathbb{k}$ de caractéristique 0, on note $\mathsf{Lie}$ la catégorie des $\mathbb{k}$-algèbres de Lie et morphismes d'algèbres de Lie, $\mathsf{Hopf}$ la catégorie des $\mathbb{k}$-algèbres de Hopf et morphismes d'algèbres de Hopf (ou, de manière équivalente, morphismes de bigèbres). Il est classique qu'existe un foncteur pleinement fidèle $\mathsf{U} : \mathsf{Lie} \to \mathsf{Hopf}$ qui associe à toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ son algèbre enveloppante $(\mathsf{U}\mathfrak{g}, \mu, 1, \Delta, \varepsilon, S)$. Nous rappelons que la structure de cogèbre est donnée par

$$\left.\begin{array}{lcl} \Delta(x) & = & x \otimes 1 + 1 \otimes x \\ \varepsilon(x) & = & 0 \end{array}\right\} \text{ si } x \in \mathfrak{g}$$

et que l'antipode vérifie $S(x) = -x$ pour $x \in \mathfrak{g}$. De même, il existe un foncteur pleinement fidèle de la catégorie des groupes et morphismes de groupes vers $\mathsf{Hopf}$, qui à un groupe $G$ associe son algèbre de groupe $\mathbb{k}G$.

On fixe désormais un groupe $G$ d'unité $e$. Pour toute $\mathbb{k}$-algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, on note $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ le groupe de ses automorphismes, et on dit qu'elle est munie d'une action de $G$, ou encore que c'est une $G$-algèbre de Lie, si l'on a fixé un morphisme de groupes $G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. Par exemple, si $(V, \rho)$ est une représentation de $G$, $\mathfrak{gl}(V)$ est canoniquement munie d'une structure de $G$-algèbre de Lie. On introduit $\mathsf{Lie}_\mathsf{G}$, catégorie dont les objets sont les $G$-algèbres de Lie, et dont les morphismes sont les morphismes d'algèbres de Lie $G$-équivariants, ou morphismes de $G$-algèbres de Lie.

Il existe un foncteur fidèle $\mathsf{U}_\mathsf{G} : \mathsf{Lie}_\mathsf{G} \to \mathsf{Hopf}$ qui à toute $G$-algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ associe le produit semi-direct $\mathsf{U}_\mathsf{G}(\mathfrak{g}) = \mathsf{U}\mathfrak{g} \rtimes \mathbb{k}G$ définit en tant qu'espace vectoriel comme $\mathsf{U}\mathfrak{g} \otimes \mathbb{k}G$, et comme algèbre de Hopf par

$$\left\{ \begin{array}{ccrcl} \text{(produit)} & & (x \otimes g_1)(y \otimes g_2) & = & \sum_{(g_1)} (x(g_1'.y)) \otimes g_1'' g_2 \\ \text{(unité)} & & 1 \otimes e & & \\ \text{(coproduit)} & & \Delta(x \otimes g) & = & \sum_{(x)} \sum_{(g)} (x' \otimes g') \otimes (x'' \otimes g'') \\ \text{(coünité)} & & \varepsilon(x \otimes g) & = & \varepsilon(x)\varepsilon(g) \\ \text{(antipode)} & & S(x \otimes g) & = & \sum_{(x)} \varepsilon(S(x')) \sum_{(g)} (S(g'').S(x'')) \otimes S(g') \end{array} \right.$$

On peut noter que les éléments primitifs de $\mathsf{U}_\mathsf{G}\mathfrak{g}$ sont exactement les $x \otimes e$ pour $x \in \mathfrak{g}$, que les éléments grouplike sont les $1 \otimes g$ pour $g \in G$. La propriété essentielle de $\mathsf{U}_\mathsf{G}\mathfrak{g}$ est que les morphismes

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{U}\mathfrak{g} & \to & \mathsf{U}_\mathsf{G}\mathfrak{g} \\ \mathfrak{g} \ni x & \mapsto & x \otimes e \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \mathbb{k}G & \to & \mathsf{U}_\mathsf{G}\mathfrak{g} \\ G \ni g & \mapsto & 1 \otimes g \end{array}$$

sont des monomorphismes de bigèbres (donc d'algèbres de Hopf). Les représentations de $\mathsf{U}_\mathsf{G}\mathfrak{g}$ sur un $\mathbb{k}$-espace vectoriel $V$ de dimension finie s'identifient aux couples $(\rho, \sigma)$ où $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ est une représentation de $\mathfrak{g}$ et $\sigma : G \to GL(V)$ est une représentation de $G$ telle que

$$\forall x \in \mathfrak{g} \ \ \forall g \in G \ \ \rho(g.x) = \rho(x)^{\sigma(g)},$$

où l'on a noté $\rho(x)^{\sigma(g)} = \sigma(g) \circ \rho(x) \circ \sigma(g)^{-1}$.

On introduit $\mathsf{Hopf}_\mathsf{G}$, catégorie dont les objets sont les couples $(U, \iota_U)$, où $U$ est un objet de $\mathsf{Hopf}$ et $\iota_U : \mathbb{k}G \to U$ un morphisme d'algèbres de Hopf injectif, avec pour morphismes de $(U, \iota_U)$

vers $(V,\iota_V)$ les morphismes d'algèbres de Hopf $\varphi : U \to V$ tels que le triangle

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\varphi"] & V \\ \Bbbk G \arrow[u, "\iota_U"] \arrow[ur, "\iota_V"'] & \end{tikzcd}$$

commute. Pour toute $G$-algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, on a un morphisme canonique $\{0\} \to \mathfrak{g}$, donc un morphisme d'algèbres de Hopf $\mathsf{U}_\mathsf{G}\{0\} = \Bbbk G \hookrightarrow \mathsf{U}_\mathsf{G}\mathfrak{g}$. On en déduit un foncteur encore noté $\mathsf{U}_\mathsf{G} : \mathsf{Lie}_\mathsf{G} \to \mathsf{Hopf}_\mathsf{G}$ qui est cette fois *pleinement fidèle*, et identifie $\mathsf{Lie}_\mathsf{G}$ à une sous-catégorie pleine de $\mathsf{Hopf}_\mathsf{G}$.

Si l'on suppose désormais $\Bbbk = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $H_0$ un groupe de Lie de dimension finie, connexe et simplement connexe, et $H = H_0 \rtimes G$ un produit semi-direct du groupe discret $G$ par $H_0$, il y a classiquement équivalences de catégories entre
- les représentations analytiques de $H_0$, les représentations de son algèbre de Lie $\mathrm{L}(H_0)$, et les représentations de $\mathsf{U}\mathrm{L}(H_0)$.
- les représentations de $G$ et les représentations de $\Bbbk G$.
De façon analogue, on obtient immédiatement une équivalence de catégories entre la catégorie des représentations analytiques de $H$ et la catégorie des représentations de $\mathsf{U}_\mathsf{G}\mathrm{L}(H_0)$.

Inversement, si l'on considère une $G$-algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de dimension finie, il existe un groupe de Lie connexe et simplement connexe $H_0$ tel que $\mathrm{L}(H_0) = \mathfrak{g}$, et on déduit de l'action par automorphismes de $G$ sur $\mathfrak{g}$ l'existence d'un morphisme $G \to Aut(H_0)$ qui permet de construire un produit semi-direct $H = H_0 \rtimes G$, dont les représentations analytiques correspondent bi-univoquement aux représentations de $\mathsf{U}_\mathsf{G}\mathfrak{g}$.

Si $\mathfrak{g}$ est munie d'une graduation notée « deg », compatible à l'action de $G$, c'est-à-dire que $\deg(g.x) = \deg(x)$ pour tous $x \in \mathfrak{g}$, $g \in G$, on peut naturellement étendre cette graduation à $\mathsf{U}_\mathsf{G}\mathfrak{g}$, de telle façon que les éléments de $\Bbbk G$ soient de degré 0.

## 3.2 Tresses infinitésimales

On fixe un entier $n \geq 1$, $\Bbbk$ un corps de caractéristique 0, et on fixe également $G$ égal au groupe symétrique sur $n$ lettres $\mathfrak{S}_n$, de manière à alléger les notations : on pourra ainsi noter $\mathsf{U}_\mathsf{G} = \mathsf{U}_{\mathfrak{S}_n}$.

On a définit dans l'introduction l'algèbre de Lie $\mathcal{T}_n$, dite des tresses infinitésimales pures. Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ agit par automorphismes sur $\mathcal{T}_n$ de façon naturelle

$$\forall s \in \mathfrak{S}_n \quad s.t_{i,j} = t_{s(i),s(j)}.$$

On peut alors définir $\mathfrak{t}_n = \mathsf{U}_\mathsf{G}\mathcal{T}_n = \mathsf{U}\mathcal{T}_n \rtimes \Bbbk\mathfrak{S}_n$, que l'on appelle l'algèbre des tresses infinitésimales sur $n$ brins. Si $\Bbbk = \mathbb{C}$, on déduit de toute représentation de $\mathfrak{t}_n$ sur un espace vectoriel $V$ un système de Knizhnik-Zamolodchikov sur $\mathbb{C}^n_*$, et une action de $\mathfrak{S}_n$ sur la fibre. La 1-forme ainsi définie est alors $\mathfrak{S}_n$-équivariante. On en déduit une structure plate sur le fibré quotient $\mathbb{C}^n_*/\mathfrak{S}_n$, et une représentation de $B_n$ sur $V$, définie à isomorphisme près (selon le choix du point base).

La grande majorité des représentations de $B_n$ connues à ce jour sont la monodromie de représentations de $\mathfrak{t}_n$. Comme exceptions, on peut signaler que les algèbres de Hecke de type $A$, avec pour paramètre une racine de l'unité, peuvent admettre une représentation irréductible de dimension $n-2$. Une telle représentation ne peut, pour $n$ assez grand, être la monodromie d'une représentation de $\mathfrak{t}_n$ (cf. [22] **II**.2.2.5). L'intérêt de se ramener à l'étude des représentations de $\mathfrak{t}_n$ en lieu et place des représentations de $B_n$ découle essentiellement du fait que l'on a remplacé une extension non scindée par un produit semi-direct.

A tout morphisme de $G$-algèbres de Lie $\varphi : \mathcal{T}_n \to \mathfrak{g}$ on associe par fonctorialité de $\mathsf{U}_\mathsf{G}$ un morphisme d'algèbres de Hopf $\mathsf{U}_\mathsf{G}\varphi : \mathfrak{t}_n \to \mathsf{U}_\mathsf{G}\mathfrak{g}$. Toute représentation de $\mathsf{U}_\mathsf{G}\mathfrak{g}$ permet alors de construire une représentation de $B_n$. Le morphisme trivial $\mathcal{T}_n \to \{0\}$ fournit un morphisme $\mathfrak{t}_n \to \Bbbk\mathfrak{S}_n$ qui correspond par monodromie au quotient $\pi : B_n \to \mathfrak{S}_n$. Le morphisme de $G$-algèbres de Lie $\mathcal{T}_n \to \Bbbk$ défini par $t_{ij} \mapsto 1$ fournit un morphisme $\mathfrak{t}_n \to \Bbbk[x] \otimes \Bbbk\mathfrak{S}_n$ : si $(V,\rho)$ est une représentation de $\Bbbk[x]$, $(W, \sigma)$ une représentation de $\mathfrak{S}_n$, l'action de $a_{ji} \in B_n$ sur $V \otimes W$ est alors donnée par

$$\rho(x) \otimes \sigma \circ \pi(a_{ji}) = \rho(x) \otimes \sigma((i\ j)).$$

De façon plus intéressante, si l'on note $\mathcal{L}_n$ l'algèbre de Lie abélienne libre sur $n(n-1)/2$ générateurs $\tau_{ij}$, pour $1 \leq i, j \leq n$ avec $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ et $\tau_{ii} = 0$, on a une action de $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathcal{L}_n$ définie par $s.\tau_{i,j} = \tau_{s(i),s(j)}$ pour $s \in \mathfrak{S}_n$. Il existe un morphisme d'algèbres de Lie $\mathfrak{S}_n$-équivariant $\mathcal{T}_n \to \mathcal{L}_n$, défini par $t_{ij} \mapsto \tau_{ij}$, donc un morphisme dans $\mathsf{Hopf}_\mathsf{G}$ de $\mathfrak{t}_n$ vers $\mathsf{U}_\mathsf{G}\mathcal{L}_n$. Les représentations de $B_n$ obtenues de cette façon se factorisent par le groupe symétrique étendu au sens de Tits [24] (cf. [22]), et $\mathsf{U}_\mathsf{G}\mathcal{L}_n$ peut être considérée comme une version infinitésimale de ce groupe discret.

Si $(V, \rho)$ est une représentation de $\mathfrak{t}_n$, on notera $\rho + \lambda$, pour $\lambda \in \Bbbk$, la représentation définie par $(\rho + \lambda)(t_{ij}) = \rho(t_{ij}) + \lambda \mathrm{Id}_V$, et $(\rho + \lambda)(s) = \rho(s)$ si $s \in \mathfrak{S}_n$. On introduit de plus, pour $2 \leq r \leq n$, les éléments

$$T_r = \sum_{1 \leq i < j \leq r} t_{ij}.$$

On montre aisément que ces éléments commutent entre eux, engendrant des sous-algèbres commutatives de $\mathcal{T}_n$ et $U\mathcal{T}_n$ : cela découle de ce que $T_r$ est un élément central de $\mathcal{T}_r$, invariant pour l'action de $\mathfrak{S}_r$.

## 3.3 Intégration des représentations

On suppose $\Bbbk = \mathbb{C}$, et on fixe une représentation $(V, \rho)$ de $\mathfrak{t}_n$ jusqu'à la proposition 1. Pour tout $h \in \mathbb{C}$ on définit la représentation $\rho_h : \mathfrak{t}_n \to \mathrm{End}(V)$ par $\rho_h(t_{ij}) = ht_{ij}$, et $\rho_h(s) = \rho(s)$ si $s \in \mathfrak{S}_n$. Formellement, ce $h \in \mathbb{C}$ définit par $t_{ij} \mapsto ht_{ij}$ un endomorphisme d'algèbre de Lie $\varphi_h$ de $\mathcal{T}_n$, et $\rho_h$ est définie de façon à faire commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathsf{U}_\mathsf{G}\mathcal{T}_n \arrow[r, "\rho"] & \mathrm{End}(V) \\ \mathsf{U}_\mathsf{G}\mathcal{T}_n \arrow[u, "\mathsf{U}_\mathsf{G}\varphi_h"] \arrow[ur, "\rho_h"'] & \end{tikzcd}$$

On rappelle que $\mathfrak{t}_n$ est munie d'une graduation définie par $\deg(t_{ij}) = 1$, et $\deg(s) = 0$ si $s \in \mathfrak{S}_n$. Pour tout $a \in B_n$, on note $a(h) \in \mathrm{End}(V)$ l'action de $a$ par monodromie de la représentation $\rho_h$ de $\mathfrak{t}_n$. On étend de façon évidente cette notation à tout élément $a$ de $\mathbb{C}B_n$. Une étude de la monodromie permet de montrer (cf. par exemple [22], **I**.1.2.4)

**Lemme 1.** *Pour tout $a \in \mathbb{C}B_n$, $a(h)$ est une fonction entière de $h$. De plus, si $1 \leq i < j \leq n$, $a_{ji}(h) = \rho((i\ j)) + o(1)$, $a_{ji}^2(h) = 1 + 2h\rho(t_{ij}) + o(h)$, et $a_{ji}(h)$ est conjugué à $\rho((i\ j))\exp(ht_{ij})$ pour $h$ suffisamment petit.*

**Lemme 2.** *Pour $h$ suffisamment petit, la restriction à $B_{n-1}$ de la monodromie de $\rho_h$ est isomorphe à la monodromie de $Res_{\mathfrak{t}_{n-1}}\rho_h$.*

On déduit du lemme 1

**Proposition 1.** *Si $(V, \rho)$ est irréductible, il existe une partie localement finie $E$ de $\mathbb{C}$ telle que la monodromie de $\rho_h$ est une représentation irréductible de $B_n$ pour $h \notin E$.*

*Preuve —* D'après le théorème de Burnside, $\rho(\mathfrak{t}_n) = \mathrm{End}(V)$. Comme $\mathfrak{t}_n$ est graduée, l'image par $\rho$ des éléments homogènes de $\mathfrak{t}_n$ forme une famille génératrice de $\mathrm{End}(V)$. Si l'on note $v$ la dimension de $V$, il existe une famille $b_1, \ldots, b_{v^2}$ d'éléments homogènes de $\mathfrak{t}_n$ telle que $(\rho(b_1), \ldots, \rho(b_{v^2}))$ soit une base de $\mathrm{End}(V)$. On note $d_i$ le degré de $b_i$, $d = d_1 + d_2 + \ldots + d_{v^2}$, et det le déterminant sur l'espace vectoriel $\mathrm{End}(V)$. On a $\det(\rho(b_1), \ldots, \rho(b_{v^2})) \neq 0$. Le lemme 1 établit

$$\rho((i\ j)) = \lim_{h \to 0} a_{ji}(h) \quad \rho(t_{ij}) = \lim_{h \to 0} h^{-1} \frac{a_{ji}^2(h) - 1}{2},$$

d'où l'on déduit, pour tout $i \in [1, v^2]$, l'existence de $A_i \in \mathbb{C}B_n$ tel que

$$b_i = \lim_{h \to 0} h^{-d_i} A_i(h).$$

On a alors

$$\det(A_1(h), \ldots, A_{v^2}(h)) = h^d \det(b_1, \ldots, b_{v^2}) + o(h^d).$$

D'après le lemme 1, on sait que cette expression est une fonction entière de $h$. Comme $\det(b_1, \ldots, b_{v^2}) \neq 0$, elle est non nulle en dehors d'un ensemble localement fini $E$. Cela signifie que, pour tout $h \notin E$, la monodromie de $\rho_h$ est une représentation irréductible de $B_n$. cqfd.

Remarquons d'autre part que la même démonstration permet de montrer, en restreignant de façon évidente la notation $\rho_h$ aux représentations de $\mathcal{T}_n$,

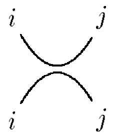
**Proposition 2.** *Si $(V, \rho)$ est une représentation irréductible de $\mathcal{T}_n$, il existe une partie localement finie $E$ de $\mathbb{C}$ telle que la monodromie de $\rho_h$ est une représentation irréductible de $P_n$ pour $h \notin E$.*

Le résultat suivant est bien connu. Nous le redémontrons toutefois ici, par défaut de références adéquates.

**Proposition 3.** *Si $(V, \rho)$ est une représentation de $\mathbb{k}\mathfrak{S}_n$, elle s'étend en une représentation encore notée $(V, \rho)$ de $\mathfrak{t}_n$ par $\rho(t_{ij}) = \rho((i\ j))$. Pour des valeurs génériques de $h$, la monodromie de $\rho_h$ se factorise par $H_n(q)$, pour $q = e^h$, et est irréductible si la représentation de $\mathfrak{t}_n$ déduite de $\rho$ l'est.*

*Preuve —* On vérifie que $[(i\ j), (k\ l)] = 0$ si $\#\{i, j, k, l\} = 4$, et que $[(i\ j), (i\ k) + (k\ j)]$ est toujours nul dans $\mathbb{k}\mathfrak{S}_n$ : cela démontre la première partie de l'énoncé. Si l'on note $a_{ji}(h)$ la monodromie de $\rho_h$ par rapport à $a_{ji} \in B_n$, on a, d'après le lemme 1, $(a_{ji}(h) - e^h)(a_{ji}(h) + e^{-h}) = 0$ pour $h$ proche de 0, donc pour tout $h$ par analyticité de $a_{ji}(h)$. La dernière partie de l'énoncé découle alors de la proposition précédente. cqfd.

On introduit l'algèbre de Brauer $Br_n(m)$ définie sur $\mathbb{Q}$ ou sur tout corps $\mathbb{k}$ de caractéristique 0 (cf. Brauer [3]), où $n \geq 1$ et $m$ est un élément du corps de base. L'algèbre $Br_n(m)$ contient naturellement $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n$, et l'on note $P_{ij}$ l'élément correspondant au diagramme de Brauer




(on a $P_{ij}^2 = mP_{ij}$). Il est classique que $Br_n(m)$ est engendrée en tant qu'algèbre unifère par l'ensemble formé des $P_{ij}$, $(i\ j)$ pour $1 \leq i < j \leq n$. Il a été démontré par Wenzl [25] (th. 3.2) que $Br_n(m)$ est un produit fini d'algèbres de matrices sur $\mathbb{k}$. On a d'autre part une action naturelle par automorphismes de $\mathfrak{S}_n$ sur $Br_n(m)$ par échange des brins des diagrammes de Brauer. Si l'on note $\tau_{ij} = (i\ j) - P_{ij}$, en supposant $\mathbb{k} \subset \mathbb{C}$,

**Proposition 4.** *Si $V$ est un $Br_n(m)$-module, on définit une représentation notée $(V, \rho)$ de $\mathfrak{t}_n$ par $\rho(t_{ij}) = \tau_{ij}$, et $\rho(\sigma) = \sigma$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Pour des valeurs génériques de $h$ et $m$, la monodromie de $\rho_h$ se factorise par $BMW_n(\alpha, s)$ avec $s = e^h$, $\alpha = e^{(m-1)h}$, et est irréductible si $\rho$ l'est.*

*Preuve —* Un calcul facile montre que les $\tau_{ij}$ vérifient les relations de tressages infinitésimaux, ce qui justifie la définition de $\rho$. On s'intéresse maintenant à la deuxième partie de l'énoncé.

D'après la proposition 3, on peut supposer que l'action de $P_{ij}$ est non nulle. Pour $i$ et $j$ fixés, $\tau_{ij}$ et $(i\ j)$ commutent, et leur spectre comparé est composé des valeurs suivantes.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\tau_{ij}$ | 1 | $-1$ | $1 - m$ |
| $(i\ j)$ | 1 | $-1$ | 1 |

D'après le lemme 1, on a alors, pour tous $i, j$,

$$(a_{ji}(h) - s)(a_{ji}(h) + s^{-1})(a_{ji}(h) - \alpha^{-1}) = 0$$

avec $s = e^h$ et $\alpha = e^{(m-1)h}$. L'autre relation à vérifier se note traditionnellement $h_2 e_1^{\pm 1} h_2 = \alpha^{\pm 1} h_2$ soit, avec nos notations,

$$\left(1 - \frac{a_{32} - a_{32}^{-1}}{s - s^{-1}}\right) a_{21}^{\pm 1} \left(1 - \frac{a_{32} - a_{32}^{-1}}{s - s^{-1}}\right) = \alpha^{\pm 1} \left(1 - \frac{a_{32} - a_{32}^{-1}}{s - s^{-1}}\right)$$

Pour montrer que cette autre relation de $BMW_n(\alpha, s)$ est vérifiée, il suffit donc, d'après le lemme 2 et l'analyticité des $a_{ji}(h)$, de le faire pour $n = 3$. On peut de plus supposer $(V, \rho)$ irréductible.

Pour $n = 3$, la relation que l'on vient d'obtenir implique que, pour $h$ et $m$ génériques, la représentation de monodromie se factorise par une algèbre semi-simple de dimension finie, l'algèbre de Hecke cyclotomique générique associée au groupe de réflexions complexes $G_4$ (cf. Broué-Malle [4]), dont $BMW_3(\alpha, s)$ est un facteur direct. Les (classes d'isomorphismes des) représentations irréductibles de cette algèbre sont uniquement déterminées par le spectre des éléments $a_{ji}(h)$ sur ces représentations : on en déduit immédiatement que la représentation obtenue se factorise par $BMW_3(\alpha, s)$. cqfd.

Par spécialisation en $h = 0$ des valeurs des caractères, il est alors immédiat que, pour $h$ proche de 0, les indexations classiques en termes de diagrammes de Young des représentations se correspondent. En d'autres termes, si $(V, \rho)$ est une représentation irréductible de $Br_n(m)$ (resp. $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$) correspondant à un diagramme de Young donné $\lambda$, la monodromie de $\rho_h$ pour des valeurs génériques de $h$ est isomorphe à la représentation irréductible de $BMW_n(\alpha, s)$ (resp. $H_n(q)$) correspondant à $\lambda$. En particulier, *toutes les représentations* de $BMW_n(\alpha, s)$ (resp. $H_n(q)$), pour $\alpha$ et $s$ (resp. $q$) génériques, s'obtiennent de cette façon.

On a utilisé ici des morphismes d'algèbres de Lie $\mathfrak{S}_n$-équivariants $\mathcal{T}_n \to \mathbb{Q}\mathfrak{S}_n$ et $\mathcal{T}_n \to Br_n(m)$, définis par $t_{ij} \mapsto (i\ j)$ et $t_{ij} \mapsto \tau_{ij}$. Nous étudierons ces morphismes en 3.4. Remarquons pour l'instant que, au niveau des algèbres enveloppantes, on a le

**Lemme 3.** *Pour $m \neq 2$, les morphismes d'algèbres associatives $\mathsf{U}\mathcal{T}_n \to \mathbb{Q}\mathfrak{S}_n$ et $\mathsf{U}\mathcal{T}_n \to Br_n(m)$ sont surjectifs.*

*Preuve* — L'image de $\mathsf{U}\mathcal{T}_n$ dans $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n$ contient les transpositions, qui engendrent $\mathfrak{S}_n$ en tant que groupe, donc $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n$ en tant qu'algèbre. Pour $Br_n(m)$, il suffit de montrer que, pour tous $i$ et $j$, $(i\ j)$ et $P_{ij}$ sont des polynômes en $\tau_{ij}$. On remarque alors

$$P_{ij} = \frac{\tau_{ij}^2 - 1}{m - 2} \qquad (i\ j) = \frac{\tau_{ij}^2 + (m-2)\tau_{ij} - 1}{m - 2}.$$

cqfd.

Notons qu'une conséquence immédiate de ce fait et des propositions 2 et 4 est

**Proposition 5.** *Pour $\alpha$ et $s$ génériques et $n \geq 2$, les restrictions à $P_n$ des représentations irréductibles de $BMW_n(\alpha, s)$ sont irréductibles.*

## 3.4 Quotients infinitésimaux

Pour fixer les idées, on suppose $\Bbbk = \mathbb{Q}$. Ce qui suit s'étend naturellement à tout corps de caractéristique 0.

L'algèbre de groupe $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n$ munie du crochet $[a, b] = ab - ba$ et de l'action par conjugaison de $\mathfrak{S}_n$ est une $G$-algèbre de Lie. On note $\mathcal{H}_n$ l'*algèbre de Lie des transpositions*, définie comme la sous-algèbre de Lie de $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n$ engendrée par les transpositions. L'action par conjugaison de $\mathfrak{S}_n$ la munit d'une structure de $G$-algèbre de Lie, et il est clair que l'inclusion $\mathcal{H}_n \to \mathbb{Q}\mathfrak{S}_n$ est un morphisme de $\mathsf{Lie}_\mathsf{G}$. On pose $\mathfrak{h}_n = \mathsf{U}_\mathsf{G}\mathcal{H}_n$. De la même façon, on note $\mathcal{BMW}_n(m)$ la sous-algèbre de Lie de $Br_n(m)$ engendrée par les éléments $\tau_{ij} = (i\ j) - P_{ij}$. C'est encore une $G$-algèbre de Lie de façon naturelle, et on peut former $\mathfrak{bmw}_n(m) = \mathsf{U}_\mathsf{G}\mathcal{BMW}_n(m)$.

Si l'on considère une représentation $(V,\rho)$ de $\mathfrak{S}_n$, le morphisme $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n \to \mathrm{End}(V) = \mathfrak{gl}(V)$ est en fait un morphisme de $G$-algèbres de Lie, de même que $\mathcal{H}_n \to \mathfrak{gl}(V)$, et l'on en déduit une action de $\mathfrak{h}_n$ sur $V$. D'autre part, si $V$ est irréductible comme représentation de $\mathfrak{S}_n$, elle est encore irréductible comme représentation de $\mathcal{H}_n$ (a fortiori de $\mathfrak{h}_n$) : cela découle de ce que $\mathcal{H}_n$ contient par définition une famille génératrice de $\mathfrak{S}_n$. En particulier, toute représentation de $\mathfrak{S}_n$ donne lieu à une représentation *semi-simple* de $\mathcal{H}_n$ (resp. $\mathfrak{h}_n$).

De l'action à gauche de $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n$ on déduit l'existence d'une action fidèle de $\mathcal{H}_n$ sur $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n$, qui est semi-simple d'après ce qui précède. D'après la théorie générale des algèbres de Lie (cf. Bourbaki [2] §6 no. 4, proposition 5), cela signifie que l'algèbre de Lie $\mathcal{H}_n$ est *réductive*, et donc déterminée à isomorphisme près par son centre et les facteurs simples de $[\mathcal{H}_n,\mathcal{H}_n]$.

L'application $t_{ij} \mapsto (i\ j)$ est un morphisme d'algèbres de Lie de $\mathcal{T}_n$ vers $\mathcal{H}_n$. On vérifie aisément qu'il est $G$-équivariant, et l'on a donc un morphisme d'algèbres de Hopf de $\mathfrak{t}_n$ vers $\mathfrak{h}_n$. Toute représentation (irréductible) de $\mathfrak{h}_n$ donne ainsi lieu à une famille à un paramètre $h$ de représentations (génériquement irréductibles) de $B_n$.

En particulier, si $(V,\rho)$ est une représentation de $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n$, la représentation encore notée $(V,\rho)$ de $\mathfrak{h}_n$ vérifie $\rho(t_{ij}) = \rho((i\ j))$, et, d'après la section précédente (proposition 3), les représentations de $B_n$ obtenues par monodromie se factorisent par l'algèbre de Hecke $H_n(q)$ avec $q = e^h$. C'est la raison pour laquelle nous appelons $\mathfrak{h}_n$ l'*algèbre de Hecke infinitésimale.*

La situation de $\mathcal{BMW}_n(m)$ (resp. $\mathfrak{bmw}_n(m)$) est tout à fait analogue. Pour reprendre le raisonnement précédent, il suffit de vérifier que les représentations irréductibles de $Br_n(m)$ sont irréductibles en tant que représentations de $\mathcal{BMW}_n(m)$. Cela découle encore de la surjectivité de $\mathsf{U}\mathcal{T}_n$ dans $Br_n(m)$ pour $m$ générique (lemme 3). On appellera $\mathfrak{bmw}_n(m)$ *l'algèbre de Brauer infinitésimale.*

Enfin, une troisième version de cette construction permet de construire un analogue infinitésimal de l'algèbre de Temperly-Lieb : si l'on projette $\mathcal{H}_n$ sur la somme des composants isotypiques de $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n$ correspondant aux diagrammes de Young à deux colonnes, on obtient encore une algèbre de Lie réductive $\mathcal{TL}_n$. Les représentations de l'algèbre de Temperly-Lieb sont alors la monodromie de représentations de *l'algèbre de Temperly-Lieb infinitésimale* $\mathfrak{tl}_n = \mathsf{U}_{\mathsf{G}}\mathcal{TL}_n$.

Cette construction donne en particulier un cadre naturel aux représentations de $B_n$ obtenues comme produits tensoriels de représentations de l'algèbre de Hecke (Birman-Wenzl-Murakami, Temperly-Lieb) $H_n(q)$ $(BMW_n(\alpha,s),\ TL_n(q))$ : elles sont encore la monodromie de représentations de l'algèbre de Hecke (Brauer, Temperly-Lieb) infinitésimale $\mathfrak{h}_n$ $(\mathfrak{bmw}_n(m),\ \mathfrak{tl}_n)$, ou des groupes de Lie « réductifs » que l'on peut leur associer. Plus précisément, si $M$ et $M'$ sont deux modules sur l'une de ces algèbres de Hopf, la monodromie de $M \otimes M'$ est en effet le produit tensoriel en tant que $B_n$-modules des monodromies de $M$ et $M'$.

Ces algèbres de Lie sont en fait déployables :

**Théorème 1.** *Pour tout $n \geq 2$, et pour $m$ générique, les algèbres de Lie $\mathcal{TL}_n$, $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{BMW}_n(m)$ sont réductives et déployables. Une sous-algèbre de Cartan déployante de chacune de ces algèbres de Lie est donnée par son intersection avec la sous-algèbre commutative de respectivement $TL_n(1)$, $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n$ et $Br_n(m)$, qui est engendrée par les images de $T_2,\dots,T_n$.*

*Preuve* — Nous avons déjà montré que ces algèbres de Lie étaient réductives, il reste à démontrer la déployabilité.

Nous faisons d'abord la démonstration pour $\mathcal{H}_n$. On note $A_n$ la sous-algèbre de $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n$ engendrée par les images de $T_2,\dots,T_n$. Chaque $T \in A_n$ agit diagonalement, à gauche et à droite, sur $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n$ : cela découle de ce que l'image de chaque $T_r$ est central dans $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_r \subset \mathbb{Q}\mathfrak{S}_n$, et de ce que $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_r$ est un produit d'algèbre de matrices sur $\mathbb{Q}$. On en déduit qu'il en est de même pour $ad(T)$. Si $\mathcal{C}_n = A_n \cap \mathcal{H}_n$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathcal{H}_n$, elle sera donc déployante. Il suffit alors de montrer que $\mathcal{C}_n$ est maximale parmi les sous-algèbres de Lie commutatives de $\mathcal{H}_n$. Or, si $\mathcal{D}_n$ est une telle sous-algèbre de Lie contenant $\mathcal{C}_n$, tout $x \in \mathcal{D}_n$ commute dans $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n$ à $T_2,\dots,T_n$, qui appartiennent à $\mathcal{C}_n$. La sous-algèbre commutative de $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n$ engendrée par $x$ et $T_2,\dots,T_n$ contenant $A_n$, sous-algèbre commutative maximale de $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n$, on en déduit $x \in A_n$, donc $x \in \mathcal{C}_n$, et $\mathcal{C}_n$ est bien maximale.

Le cas de $TL_n$ est absolument similaire, puisque $TL_n(1)$ est un facteur direct de $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n$. Pour traiter le cas de $\mathcal{BMW}_n(m)$ pour $m$ générique, nous pouvons de même considérer une sous-algèbre commutative $A_n$ de $Br_n(m)$ engendrée par les images de $T_2, \dots, T_n$. La démonstration est alors tout à fait identique, sous réserve que $A_n$ soit une sous-algèbre commutative maximale de $Br_n(m)$ pour $m$ générique ($Br_n(m)$ est également un produit d'algèbres de matrices sur $\mathbb{Q}$, d'après Wenzl [25] th. 3.2). Nous établissons en appendice (théorème 4) que c'est bien le cas. cqfd.

# 4 L'algèbre de Lie des transpositions

## 4.1 L'algèbre de groupe $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n$

L'algèbre de groupe $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n$ de $\mathfrak{S}_n$ est une algèbre semi-simple, dont les représentations irréductibles sont classiquement indexées par les partitions $\lambda$ de $n$ (on note $\lambda \vdash n$). On note $S^\lambda$ la représentation de $\mathfrak{S}_n$ correspondant à $\lambda \vdash n$, avec la convention que la partition $[n]$ de $n$ correspond à la représentation triviale $\mathbb{1}$ de $\mathfrak{S}_n$, $[1^n]$ à la représentation alternée. On a la décomposition

$$\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n = \bigoplus_{\lambda \vdash n} \mathrm{End}(S^\lambda).$$

Soit maintenant $(V, \rho)$ une représentation de $\mathfrak{S}_n$, $\overline{\rho} = \rho \otimes \epsilon$ le produit tensoriel de $\rho$ par la représentation alternée de $\mathfrak{S}_n$, et $\overline{\rho}^*$ la représentation contragrédiente de $\overline{\rho}$. Comme toute représentation de $\mathfrak{S}_n$, $\overline{\rho}$ est autoduale, c'est-à-dire qu'il existe $\Phi \in GL(V)$ tel que le carré

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\overline{\rho}(g)"] \arrow[d, "\Phi"'] & V \arrow[d, "\Phi"] \\ V \arrow[r, "\overline{\rho}^*(g)"] & V \end{tikzcd}$$

commute pour tout $g \in \mathfrak{S}_n$. On note $\widetilde{\Phi}$ l'automorphisme de $\mathrm{End}(V)$ associé, défini par $\widetilde{\Phi}(u) = \Phi \circ u \circ \Phi^{-1}$, pour tout $u \in \mathrm{End}(V)$. Si $s$ est une transposition, on a

$$\begin{array}{ccccccc} \overline{\rho}(s) & = & \rho(s)\epsilon(s) & = & -\rho(s) & & \\ \overline{\rho}^*(s) & = & {}^t\overline{\rho}(s^{-1}) & = & {}^t\overline{\rho}(s) & = & -{}^t\rho(s) \end{array}$$

Si l'on note $\tau$ l'automorphisme de $\mathfrak{gl}(V)$ défini par $\tau(u) = -{}^t u$, on en déduit un carré commutatif dans la catégorie $\mathsf{Lie}_{\mathsf{G}}$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{T}_n \arrow[rr, "\rho \oplus \overline{\rho}"] \arrow[d, "\rho"'] & & \mathfrak{gl}(V) \oplus \mathfrak{gl}(V) \\ \mathfrak{gl}(V) \arrow[rr, hook, "\mathrm{Id} \oplus \tau"] & & \mathfrak{gl}(V) \oplus \mathfrak{gl}(V) \arrow[u, "\mathrm{Id} \oplus \widetilde{\Phi}"'] \end{tikzcd}$$

que l'on peut présenter sous forme d'un triangle

$$\begin{tikzcd} \mathcal{T}_n \arrow[r, "\rho \oplus \widetilde{\Phi}^{-1} \circ \overline{\rho}"] \arrow[dr, "\rho"'] & \mathfrak{gl}(V) \oplus \mathfrak{gl}(V) \\ & \mathfrak{gl}(V) \arrow[u, hook, "\mathrm{Id} \oplus \tau"'] \end{tikzcd}$$

## 4.2 Etude préliminaire

Si l'on remarque que le sous-espace vectoriel de $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n$ engendré par les éléments de la forme $s - \epsilon(s)s^{-1}$, pour $s \in \mathfrak{S}_n$, est stable par crochet, on en déduit que $\mathcal{H}_n$ est incluse dans ce sous-espace : toute transposition $s$ vérifie en effet $s = (s - \epsilon(s)s^{-1})/2$. On peut en déduire immédiatement une majoration grossière de la dimension de $\mathcal{H}_n$, de l'ordre de $n!/2$.

D'autre part, il est remarquable que $\mathcal{H}_n$ est également la sous-algèbre de Lie de $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n$ engendrée par les transpositions consécutives, c'est-à-dire les générateurs de Coxeter $s_i = (i\ i{+}1)$ de $\mathfrak{S}_n$. En effet, si l'on introduit, pour tout $s \in \mathfrak{S}_n$, les opérateurs de $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n$

$$\begin{cases} \mathrm{ad}(s)(x) & = & [s, x] \\ \mathrm{Ad}(s)(x) & = & sxs^{-1} \end{cases}$$

on constate que, pour $s^2 = 1$, $\mathrm{ad}(s) \circ \mathrm{ad}(s) = 2 - 2\mathrm{Ad}(s)$. Or,

$$\begin{array}{rcl} (i\ j) & = & s_i s_{i+1} s_{i+2} \ldots s_{j-2} s_{j-1} s_{j-2} \ldots s_{i+1} s_i \\ & = & \mathrm{Ad}(s_i) \circ \mathrm{Ad}(s_{i+1}) \circ \ldots \circ \mathrm{Ad}(s_{j-2})(s_{j-1}) \\ & = & 2^{i+1-j}(2 - \mathrm{ad}(s_i)^2) \circ \ldots \circ (2 - \mathrm{ad}(s_{j-2})^2)(s_{j-1}) \end{array}$$

appartient bien à l'algèbre de Lie engendrée par les $s_i$.

Enfin, on détermine aisément le centre de $\mathcal{H}_n$ :

**Proposition 6.** *Le centre de $\mathcal{H}_n$ est de dimension 1, engendré par la somme des transpositions.*

*Preuve —*

Soit $z$ un élément du centre de $\mathcal{H}_n$. Comme, pour toute transposition $s$, $[s, z] = sz - zs = 0$, donc $sz = zs$, $z$ appartient au centre de $\mathbb{k}\mathfrak{S}_n$. On note $c_0, c_1, \ldots, c_p$ les classes de conjugaisons de $\mathfrak{S}_n$, de façon telle que $c_0$ soit la classe des transpositions, et on note $T_i \in \mathbb{k}\mathfrak{S}_n$ la somme des éléments de $c_i$. On peut alors écrire $z = \alpha_0 T_0 + \ldots + \alpha_p T_p$. On note $\phi_i$ la fonction centrale associée à $c_i$ ($\psi_i(g) = \delta_{ij}$ pour tout $g \in c_j$), étendue en une forme linéaire sur $\mathbb{k}\mathfrak{S}_n$. L'énoncé revient à dire que $\psi_k(z) = 0$ pour tout $k > 0$. On note $\mathcal{H}_n^{(0)}$ l'espace vectoriel engendré par les tranpositions, et on définit, pour tout $i \geq 0$, $\mathcal{H}_n^{(i+1)} = [\mathcal{H}_n^{(0)}, \mathcal{H}_n^{(i)}] \subset \mathcal{H}_n$. Il est clair que $\mathcal{H}_n$ est la somme des $\mathcal{H}_n^{(i)}$ pour $i \geq 0$. On fixe $k \in [1, p]$, et on va montrer $\mathcal{H}_n^{(i)} \subset \mathrm{Ker}\psi_k$ pour tout $i \geq 0$. C'est évident pour $i = 0$, et, si $i \geq 1$, pour tout $l \in \mathcal{H}_n^{(i-1)}$, et pour tout $\alpha \in \{1, \ldots, m\}$, on a alors

$$\psi_k([s, l]) = \psi_k(sl) - \psi_k(ls) = \psi_k(slss^{-1}) - \psi_k(ls) = 0$$

d'où l'on déduit $\mathcal{H}_n^{(i)} \subset \mathrm{Ker}\psi_k$, et $\mathcal{H}_n \subset \mathrm{Ker}\psi_k$. cqfd.

## 4.3 Action sur $(\mathfrak{sl}_p)^{\otimes n}$

On fixe un entier $n \geq 2$, et on note $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_p(\mathbb{C})$. Pour $p$ grand devant $n$, les $\mathfrak{g}$-modules irréductibles qui interviennent dans $\mathfrak{g}^{\otimes n}$ sont indexés par les couples $(D_1, D_2)$, où $D_1$ et $D_2$ sont des partitions d'un même entier inférieur ou égal à $n$ (cf. Hanlon [14]). D'autre part, on a classiquement une action de $\mathfrak{t}_n$ sur $\mathfrak{g}^{\otimes n}$ (cf. par exemple Kassel [16]) une fois fixée une normalisation à 1 de l'action du Casimir sur la représentation adjointe $\mathfrak{g}$. En d'autres termes, si l'on identifie $(D_1, D_2)$ à la représentation de $\mathfrak{g}$ correspondante, il existe une famille de $\mathfrak{t}_n$-modules $W_{D_1,D_2}$ tels que l'on ait la décomposition de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{t}_n$-modules

$$\mathfrak{g}^{\otimes n} = \bigoplus_{k=0}^{n} \bigoplus_{D_1, D_2 \vdash k} (D_1, D_2) \otimes W_{D_1,D_2}.$$

Plus précisément, on peut identifier $W_{D_1,D_2}$ aux vecteurs de plus haut poids de $\mathfrak{g}^{\otimes n}$ dont le poids est le poids dominant de $(D_1, D_2)$. On considère alors le sous-bimodule de $\mathfrak{g}^{\otimes n}$ défini, suivant la décomposition précédente, par

$$(\mathfrak{g}^{\otimes n})^{\mathsf{top}} = \bigoplus_{D_1, D_2 \vdash n} (D_1, D_2) \otimes W_{D_1,D_2}.$$

Dans [14], P. Hanlon a défini, pour $D_1$ et $D_2$ deux partitions de $n$, un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels entre $W_{D_1,D_2}$ et le produit tensoriel des modules de Specht associés à $D_1$ et $D_2$. En suivant par exemple l'étude menée par M. El Houari dans sa thèse (cf. [11]), on peut montrer

**Proposition 7.** *(cf. [22],* **III**.*2.5, prop. 29) Pour $D_1$ et $D_2$ deux partitions de $n$ et $p$ grand devant $n$, il existe une représentation $\rho$ de $\mathfrak{h}_n$ telle que l'action de $\mathfrak{t}_n$ sur $W_{D_1,D_2}$ s'identifie à $\rho_{\frac{1}{n}}$. Il en est donc de même pour l'action de $\mathfrak{t}_n$ sur $(\mathfrak{g}^{\otimes n})^{\mathsf{top}}$.*

# 5 Sur la représentation de Burau

Pour $n \geq 2$ et $q = e^h$ fixé, on appelle algèbre de Burau l'image de $\Bbbk B_n$ dans la représentation de Burau réduite. Il est classique que cette algèbre est, pour $q$ générique, un facteur direct simple de l'algèbre de Hecke, correspondant à la partition $[n-1,1]$ de $n$. Nous étudions dans cette section son analogue « infinitésimal ».

## 5.1 La représentation standard de $\mathfrak{S}_n$

On note $E = \mathbb{Q}^n$, muni de sa base canonique $e_1, \ldots, e_n$. L'action de $s \in \mathfrak{S}_n$ est donnée par $s.e_i = e_{s(i)}$. On a une forme linéaire $\varphi \in E^*$ définie par $\varphi(e_i) = 1$ pour tout $i \in [1,n]$. On étudie $V = \mathrm{Ker}\varphi$, qui est $\mathfrak{S}_n$-stable. C'est la représentation standard de $\mathfrak{S}_n$, représentation irréductible de dimension $n-1$ associée à la partition $[n-1,1]$ de $n$. On note encore $s_k = (k\ k+1)$ pour $k \in [1,n]$,

$$J_k = \sum_{i=1}^{k-1} (i\ k) \text{ pour } k \in [2,n]$$

les éléments classiquement dits « de Jucys-Murphy ». Pour $r \in [2,n]$, on définit

$$w_r = (1-r)e_r + \sum_{i<r} e_i \in V.$$

La famille $(w_2, ..., w_n)$ est une base de $V$. Pour $k \in [2,n]$ et $r \in [2,n]$, on a

$$\left\{ \begin{array}{lcll} J_k w_r & = & (k-2)w_r & \text{si } r < k \\ J_k w_k & = & -w_k & \\ J_k w_r & = & (k-1)w_r & \text{si } r > k \end{array} \right.$$

Si l'on pose, pour $k \in [2,n-1]$, $j_k = J_k - J_{k+1} + 1$ et $j_1 = 1 - J_2$, on a

$$\left\{ \begin{array}{lcl} j_k w_r & = & 0 \text{ si } r \notin \{k, k+1\} \\ j_k w_k & = & (1-k)w_k \\ j_k w_{k+1} & = & (k+1)w_{k+1} \end{array} \right. .$$

On introduit enfin, pour $s \in [1,n]$,

$$\tilde{J}_s = \frac{1}{s}\sum_{k=2}^{s} J_k \qquad T = \sum_{i<j} (i\ j)$$

(en particulier $\tilde{J}_1 = 0$ et $T = n\tilde{J}_n$) et, pour $s \in [1,n-1]$, $E_s = \tilde{J}_s - \tilde{J}_{s+1} + 1/2$. Pour $s \in [1,n-1]$ et $r \in [2,n]$, on a

$$\left\{ \begin{array}{lcl} E_s w_r & = & \delta_{r,s+1} w_r \\ T w_r & = & \frac{n(n-3)}{2} w_r \end{array} \right. .$$

En particulier, l'identité de $V$ est dans l'image de $\mathcal{H}_n$ dès que $n > 3$. On en déduit que c'est également le cas de $j_k$ et $E_s$. Pour $k \in [1,n-1]$, on a, en posant $w_1 = 0$,

$$\left\{ \begin{array}{lcl} s_k w_r & = & w_r \text{ si } r \notin \{k, k+1\} \\ s_k w_k & = & \frac{1}{k} w_k + \frac{k-1}{k} w_{k+1} \\ s_k w_{k+1} & = & \frac{k+1}{k} w_k - \frac{1}{k} w_{k+1} \end{array} \right. .$$

Si l'on pose $s'_k = s_k + J_k - J_{k+1}$, pour $k \in [2, n-1]$, on a

$$\left\{ \begin{array}{lcl} s'_k w_r & = & 0 \text{ si } r \notin \{k, k+1\} \\ s'_k w_k & = & \frac{1-k^2}{k} w_k + \frac{k-1}{k} w_{k+1} \\ s'_k w_{k+1} & = & \frac{k+1}{k} w_k + \frac{k^2-1}{k} w_k \end{array} \right. .$$

L'espace vectoriel de base $(w_k, w_{k+1})$ est stable par $s'_k$, $j_k$, $E_{k-1}$, $E_k$. On fixe $k$, et on identifie de façon naturelle les endomorphismes de ce sous-espace à des endomorphismes de $V$ qui s'annulent sur les $w_r$ pour $r \notin \{k, k+1\}$. On a

$$s'_k = \begin{pmatrix} \frac{1-k^2}{k} & \frac{k-1}{k} \\ \frac{k+1}{k} & \frac{k^2-1}{k} \end{pmatrix}$$

et

$$E_{k-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} E_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} j_k = \begin{pmatrix} 1-k & 0 \\ 0 & k+1 \end{pmatrix} .$$

On définit de plus

$$t_k = [s'_k, E_{k-1}] = -[s'_k, E_k] = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1-k}{k} \\ \frac{k+1}{k} & 0 \end{pmatrix} .$$

Si l'on note maintenant

$$X_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Y_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

on a

$$\left\{ \begin{array}{lcl} X_k & = & \frac{k+1}{2}(E_{k-1} - E_k) + \frac{k}{2(k-1)}(s'_k - t_k) \\ Y_k & = & \frac{k-1}{2}(E_{k-1} - E_k) + \frac{k}{2(k-1)}(s'_k + t_k) \end{array} \right. .$$

## 5.2 L'algèbre de Burau infinitésimale

On note maintenant $\mathcal{B}_n$ la $G$-algèbre de Lie image de $\mathcal{H}_n$ dans $\mathfrak{gl}(V)$. De la présence dans l'image de $\mathcal{H}_n$ des éléments $E_s$, $X_k$ et $Y_k$ décrits ci-dessus, et de l'étude élémentaire du cas $n = 3$, on déduit immédiatement

**Théorème 2.** *Pour $n > 3$, l'algèbre de Lie $\mathcal{B}_n$ est isomorphe à $\mathfrak{gl}_{n-1}(\mathbb{Q})$. De plus, $\mathcal{B}_3 \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{Q})$.*

De façon analogue à ce qui précède, on pose $\mathfrak{b}_n = \mathsf{U}_\mathsf{G}\mathcal{B}_n$, que l'on appelle algèbre de Burau infinitésimale, et qui est complètement déterminée par l'isomorphisme précédent et l'action de $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathfrak{sl}(V) = V \otimes V^*/\mathbb{1}$.

**Corollaire.** *Pour tout $n \geq 3$ et $q$ générique, si $\lambda$ est un diagramme de Young, $F_\lambda$ le foncteur de Schur associé à $\lambda$, et si $V_q$ désigne la représentation de Burau réduite de $B_n$, $F_\lambda(V_q)$ est irréductible. Si de plus $\mu$ est un autre diagramme de Young, on a, pour $q$ générique,*

$$F_\lambda(V_q) \otimes F_\mu(V_q) \simeq \bigoplus_\nu L_{\lambda\mu\nu} F_\nu(V_q),$$

*où $\nu$ parcourt l'ensemble des diagrammes de Young, et les $L_{\lambda\mu\nu}$ sont les coefficients de Littlewood-Richardson.*

*Preuve —* D'après le théorème 2, $F_\lambda(V)$ est irréductible comme $\mathcal{B}_n$-module, donc comme $\mathfrak{b}_n$-module, donc $F_\lambda(V_q)$, monodromie de $F_\lambda(V)$, l'est également d'après la proposition 1. On peut alors écrire les isomorphismes classiques de $GL(V)$-modules

$$F_\lambda(V) \otimes F_\mu(V) \simeq \bigoplus_\nu L_{\lambda\mu\nu} F_\nu(V),$$

qui sont en particulier des isomorphismes de $\mathfrak{b}_n$-modules. Il ne reste alors plus qu'à appliquer la remarque précédente pour conclure. cqfd.

### 5.3 Puissances alternées

Pour $r \in [0, n-1]$, on note $C_r$ (resp. $C_r(q)$) la représentation de $\mathfrak{S}_n$ (resp. de $H_n(q)$) associée à la partition « en équerre » $[n-r, 1^r]$ de $n$. Il est classique, et bien compris depuis les travaux de Kilmoyer [5], que $C_r$ est isomorphe à $\Lambda^r V$.

On note encore $C_r$ et $V$ les représentations de $\mathcal{H}_n$ et $\mathfrak{h}_n$ correspondantes. De cette façon, $\Lambda^r V$ désigne maintenant la puissance alternée $r^e$de $V$ comme représentation de $\mathcal{H}_n$ (resp. $\mathfrak{h}_n$). On a alors

**Proposition 8.** *(cf. [22], cor. du th. 2,* **II***.1.5.3) Pour tout $r \in [0, n-1]$, $\Lambda^r V$ est isomorphe à $(r-1) + C_r$ en tant que représentation de $\mathfrak{h}_n$.*

Cela découle du fait que l'action de $\mathfrak{S}_n$ sur le $\mathfrak{h}_n$-module $\Lambda^r V$ est irréductible, et du théorème de classification des $KZ$-modules irréductibles pour l'action de $\mathfrak{S}_n$ (cf. [23]) – l'élimination des cas particuliers est immédiate.

**Corollaire.** *Pour des valeurs génériques de $q$, la puissance alternée $r^e$ de la représentation de Burau réduite est irréductible, et isomorphe, après multiplication de l'action des générateurs par $q^{1-r}$, à la représentation de $H_n(q)$ correspondant à la partition $[n-r, 1^r]$.*

**Corollaire.** *Pour $q$ générique, et $r \in [0, n-1]$, le produit tensoriel des représentations $C_r(q)$ et $C_s(q)$ se décompose en somme de $p+1$ représentations irréductibles $W_i$ pour $i \in [0, p]$, avec $p = min(n-1-r, s)$. La dimension de $W_i$ est égale à la dimension du $\mathfrak{gl}_{n-1}(\mathbb{C})$-module de poids dominant $\varpi_{r+i} + \varpi_{s-i}$, où par convention $\varpi_{n-1}$ correspond à la trace et $\varpi_0 = 0$.*

*Preuve —* Il suffit de montrer que $\Lambda^r V \otimes \Lambda^s V$ se décompose de cette façon en tant que représentation de $\mathfrak{t}_n$, c'est-à-dire comme représentations de $\mathfrak{b}_n$. Pour l'action de $\mathcal{B}_n = \mathfrak{gl}(V)$, on a classiquement

$$\Lambda^r V \otimes \Lambda^s V = W_0 \oplus \ldots \oplus W_p$$

avec $W_i$ représentation irréductible de $\mathfrak{gl}(V) = \mathcal{B}_n$ de poids dominant $\varpi_{r+i} + \varpi_{s-i}$. On veut montrer de plus que $W_i$ est stable par l'action de $\Bbbk\mathfrak{S}_n \subset \mathfrak{b}_n$. Mais si l'on note $\rho^r$ (resp. $\rho^s$) l'action de $\mathfrak{t}_n$ sur $\Lambda^r V$ (resp. $\Lambda^s V$) on a, d'après la proposition 8,

$$\begin{array}{rcl} \rho^r(t_{ij}) & = & (r-1) + \rho^r((i\ j)) \\ \rho^s(t_{ij}) & = & (s-1) + \rho^s((i\ j)) \end{array}$$

d'où $(\rho^r \otimes \rho^s)(t_{ij}) = (r+s-2) + \rho^r((i\ j)) \otimes 1 + 1 \otimes \rho^s((i\ j))$, et $2(\rho^r \otimes \rho^s)((i\ j)) = ((\rho^r \otimes \rho^s)(t_{ij}) - (r+s-2))^2 - 2$. Chaque $W_i$, stable par $t_{ij}$, est donc stable par $(i\ j)$. Comme les transpositions engendrent $\mathfrak{S}_n$, chaque $W_i$ est stable pour l'action de $\mathfrak{S}_n$, et la décomposition précédente est une décomposition de $\mathfrak{t}_n$-module. Il ne reste plus qu'à appliquer la proposition 1 pour conclure. cqfd.

## 6 Lego tensoriel

Nous établissons ici les lemmes généraux qui nous permettront de décomposer l'algèbre de Temperly-Lieb infinitésimale, à partir de la décomposition en irréductibles des produits tensoriels de certaines de ses représentations.

On fixe $\Bbbk$ un corps de caractéristique 0, et $\overline{\Bbbk}$ une clôture algébrique de $\Bbbk$. Soit $\mathfrak{g}$ une $\Bbbk$-algèbre de Lie simple. A toute représentation $M$ de $\mathfrak{g}$ sur $\Bbbk$ on associe $\mathfrak{sl}(M) = M \otimes M^*/\mathbb{1}$. C'est une représentation autoduale de $\mathfrak{g}$, et on a

**Lemme 4.** *La représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ s'injecte dans $\mathfrak{sl}(M)$, pour toute représentation irréductible non triviale $M$ de $\mathfrak{g}$.*

*Preuve —* Le morphisme d'algèbres de Lie $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(M)$ qui donne l'action de $\mathfrak{g}$ sur $M$ est un morphisme de $\mathfrak{g}$-modules. Comme $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, son image est incluse dans $\mathfrak{sl}(M)$ et, puisque $\mathfrak{g}$ est irréductible, on obtient bien une injection de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{sl}(M)$. cqfd.

En particulier, si $U$ et $V$ sont deux représentations non triviales de $\mathfrak{g}$, il existe toujours, par semi-simplicité de $\mathfrak{g}$, un morphisme non nul de $\mathfrak{sl}(U)$ vers $\mathfrak{sl}(V)$ :

$$\mathfrak{sl}(U) \leftrightarrows \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{sl}(V)$$

On en déduit que le produit tensoriel de deux représentations non triviales de $\mathfrak{g}$ n'est jamais irréductible.

**Proposition 9.** *Si $U$ et $V$ sont deux représentations non triviales de $\mathfrak{g}$ sur $\overline{\mathbb{k}}$, alors $U \otimes V$ n'est pas irréductible.*

*Preuve —* Comme $\mathfrak{g}$ est semi-simple, On peut supposer que $U$ et $V$ sont irréductibles. Si $U \otimes V$ est irréductible, alors $\mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(U \otimes V) = \overline{\mathbb{k}}$. Mais

$$\begin{aligned} \mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(U \otimes V) &= (U \otimes V \otimes V^* \otimes U^*)^{\mathfrak{g}} = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathbb{1} + \mathfrak{sl}(U), \mathbb{1} + \mathfrak{sl}(V)) \\ &\supset \mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(\mathbb{1}) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{sl}(U), \mathfrak{sl}(V)) \end{aligned}$$

et l'on a vu que $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{sl}(U), \mathfrak{sl}(V))$ est non nul, donc l'espace des $\mathfrak{g}$-endomorphismes de $U \otimes V$ est de dimension au moins 2, et $U \otimes V$ n'est pas irréductible. cqfd.

Dans le cas où l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est déployable, on sait que, pour $U$ et $V$ irréductibles, $U \otimes V$ contient $U \boxtimes V$, la multiplication de Cartan de $U$ par $V$. Il suffit alors de montrer que, si $\mathfrak{g}$ est simple, $\dim U \boxtimes V < \dim U \otimes V$, ce qui découle (cf. [21], lemme 1) de la formule des caractères de Weyl, et fournit une autre démonstration de la proposition précédente.

Remarquons enfin

**Proposition 10.** *Si $M$ est une représentation non triviale de $\mathfrak{g}$ sur $\mathbb{k}$ telle que $\mathfrak{sl}(M)$ est irréductible en tant que $\mathfrak{g}$-module, alors $\mathfrak{g}$ est isomorphe à $\mathfrak{sl}(M)$ en tant qu'algèbre de Lie. Cet isomorphisme est donné par la composition des flèches*

$$\mathfrak{g} \hookrightarrow \mathrm{End}(M) \twoheadrightarrow \mathfrak{sl}(M).$$

*Preuve —* Comme $\mathfrak{g}$ est simple, $\mathfrak{g}$ s'injecte dans $\mathrm{End}(M) = \mathfrak{gl}(M) = \mathfrak{sl}(M) \oplus \mathbb{k}$, donc dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(M)$. Mais alors

$$R = \{x \in \mathfrak{sl}(M) \mid [x, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{sl}(M)$ qui contient $\mathfrak{g}$, et qui est stable pour l'action de $\mathfrak{g}$. Comme $\mathfrak{sl}(M)$ est irréductible en tant que $\mathfrak{g}$-module, on en déduit que $R = \mathfrak{sl}(M)$, c'est-à-dire que $\mathfrak{g}$ est un idéal de $\mathfrak{sl}(M)$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(M)$ étant simple, on en déduit $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(M)$. cqfd.

**Proposition 11.** *Si $\mathbb{k}$ est clos, et si $M$ est une représentation non triviale de $\mathfrak{g}$ sur $\mathbb{k}$ telle que $S^2M$ et $\Lambda^2M$ sont irréductibles, alors $\mathfrak{sl}(M)$ est irréductible.*

*Preuve —* Comme les représentations irréductibles $S^2M$ et $\Lambda^2M$ n'ont pas même dimension, elles ne sont pas isomorphes. On en déduit que

$$\mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(M \otimes M) = \mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(S^2M) \oplus \mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(\Lambda^2M)$$

est de dimension 2. De plus,

$$\mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(M \otimes M) = (M \otimes M \otimes M^* \otimes M^*)^{\mathfrak{g}} = \mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(M \otimes M^*)$$

donc $M \otimes M^*$ admet également deux composantes irréductibles, dont la représentation triviale. On en déduit que $\mathfrak{sl}(M) = M \otimes M^*/\mathbb{1}$ est irréductible. cqfd.

**Corollaire.** *Si $M$ est une représentation non triviale de $\mathfrak{g}$, et si $S^2M$ et $\Lambda^2 M$sont absolument irréductibles, alors le morphisme naturel $\mathfrak{g} \to \mathfrak{sl}(M)$ est un isomorphisme.*

*Preuve —* Les $\mathfrak{g}\otimes\overline{\mathbb{k}}$-modules $S^2(M)\otimes\overline{\mathbb{k}}$ et $\Lambda^2(M)\otimes\overline{\mathbb{k}}$ sont respectivement isomorphes à $S^2(M\otimes\overline{\mathbb{k}})$ et $\Lambda^2(M\otimes\overline{\mathbb{k}})$. On en déduit que $S^2(M\otimes\overline{\mathbb{k}})$ et $\Lambda^2(M\otimes\overline{\mathbb{k}})$ sont des $\mathfrak{g}\otimes\overline{\mathbb{k}}$-modules irréductibles, donc $\mathfrak{sl}(M\otimes\overline{\mathbb{k}})$ l'est également d'après la proposition 11. Comme $\mathfrak{sl}(M\otimes\overline{\mathbb{k}}) \simeq \mathfrak{sl}(M)\otimes\overline{\mathbb{k}}$ en tant que $\mathfrak{g}\otimes\overline{\mathbb{k}}$-modules, $\mathfrak{sl}(M)\otimes\overline{\mathbb{k}}$ est irréductible et donc $\mathfrak{sl}(M)$ est un $\mathfrak{g}$-module irréductible. On déduit alors de la proposition 10 que le morphisme $\mathfrak{g} \to \mathfrak{sl}(M)$ est un isomorphisme. cqfd.

# 7 L'algèbre de Temperly-Lieb infinitésimale

On fixe $n$ un entier au moins égal à 2. Pour $r \in [0, n/2]$, on note $J_{n,r}$ la représentation de $\mathfrak{S}_n$ associée à la partition $[n-r, r]$ ainsi que, par abus, la représentation de $\mathcal{H}_n$ correspondante. On note $J_{n,r}(q)$ la représentation de $H_n(q)$ également indexée par cette partition.

L'algèbre de Hecke $H_n(q)$ admet un quotient qui présente un intérêt propre, l'algèbre de Temperly-Lieb. Apparue dans le cadre de la physique statistique en 1971, elle dévoila toute son importance à l'occasion des travaux de Jones [15] sur la classification des facteurs de type $\mathrm{II}_1$. Le polynôme de Jones se déduit en particulier des représentations de cette algèbre.

Pour des valeurs génériques de $q$, l'algèbre de Temperly-Lieb $TL_n(q)$ est en fait une algèbre semi-simple facteur direct de l'algèbre de Hecke $H_n(q)$, dont les représentations irréductibles sont les $J_{n,r}(q)$ que l'on vient de définir. En particulier, on a un isomorphisme d'algèbres

$$TL_n(q) \simeq \bigoplus_{r=0}^{n/2} \mathrm{End}(J_{n,r}).$$

avec, pour $r \geq 1$,

$$\dim J_{n,r} = \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n \\ r-1 \end{pmatrix} = \frac{n!(n-2r+1)}{r!(n-r+1)!}, \quad \dim TL_n(q) = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}.$$

Nous montrons ici que la version infinitésimale de cette algèbre, que nous supposons ici définie sur un corps $\mathbb{k}$ de caractéristique 0 arbitraire, admet une structure remarquablement simple. Cela nous permet de résoudre complètement le problème de la décomposition en irréductibles des représentations de $B_n$ déduites par construction tensorielle des représentations de l'algèbre de Temperly-Lieb, au moins dans le cas générique.

**Proposition 12.** *(cf. [22]* **III***.4.5, prop. 37) Pour tout $n \geq 3$ et tous $r, s \in [0, n/2]$ distincts, $S^2 J_{n,r}$, $\Lambda^2 J_{n,r}$ et $J_{n,r} \otimes J_{n,s}$ sont absolument irréductibles pour l'action de $\mathcal{H}_n$.*

L'idée générale de la preuve est la suivante : on montre que l'image dans ces représentations des éléments $T_2, \dots, T_n$ de $\mathcal{T}_n$ engendre l'ensemble des matrices diagonales. Cela permet de ramener l'irréductibilité en tant que $\mathfrak{t}_n$-module (et même de $\mathcal{T}_n$-module) à un problème de combinatoire, que l'on résouds de manière itérative.

On déduit immédiatement de la proposition 1

**Corollaire.** *Pour $r$ et $s$ comme précédemment, et pour des valeurs génériques de $q \in \mathbb{C}$, les représentations $S^2 J_{n,r}(q)$, $\Lambda^2 J_{n,r}(q)$ et $J_{n,r}(q) \otimes J_{n,s}(q)$ sont irréductibles comme représentations de $B_n$.*

Si l'on note maintenant $\mathcal{J}_{n,r}$ l'image de $\mathcal{H}'_n = [\mathcal{H}_n, \mathcal{H}_n]$ dans $End(J_{n,r})$ (en particulier $\mathcal{B}_n = \mathbb{k} \oplus \mathcal{J}_{n,1}$), on déduit du lego tensoriel de la section 6

**Théorème 3.** *On a un isomorphisme de $G$-algèbres de Lie*

$$\mathcal{TL}_n \simeq \mathbb{k} \oplus \bigoplus_{r=1}^{n/2} \mathcal{J}_{n,r}$$

*où, pour tout $r \in [1, n/2]$, $\mathcal{J}_{n,r}$ est isomorphe à $\mathfrak{sl}(J_{n,r})$ muni de l'action naturelle de $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathfrak{sl}(J_{n,r}) = J_{n,r} \otimes J^*_{n,r}/\mathbb{1}$.*

*Preuve —* On suppose $\Bbbk$ algébriquement clos. Comme quotient d'une algèbre de Lie réductive, $\mathcal{TL}_n$ est réductive, et son centre est de dimension au plus 1. L'algèbre de Lie dérivée $\mathcal{TL}'_n = [\mathcal{TL}_n, \mathcal{TL}_n]$ se décompose alors comme produit d'algèbres de Lie simples $\mathfrak{g}_1 \times \ldots \times \mathfrak{g}_p$, et ses représentations irréductibles $J_{n,r}$ s'écrivent $J_{n,r}^{(1)} \otimes \ldots \otimes J_{n,r}^{(p)}$, avec $J_{n,r}^{(i)}$ une représentation irréductible de l'algèbre de Lie simple $\mathfrak{g}_i$. D'après la proposition 9, le fait que, pour $1 \leq r < s$, $J_{n,r} \otimes J_{n,s}$ soit irréductible implique que, pour tout $i \in [1,p]$, $J_{n,r}^{(i)} = \mathbb{1}$ ou $J_{n,s}^{(i)} = \mathbb{1}$

Quitte à renuméroter les exposants symboliques, on peut supposer $J_{n,r}^{(r)} \neq \mathbb{1}$ et que $J_{n,r}^{(i)} = \mathbb{1}$ si $r \neq i$, $i \leq n/2$. Le fait que $S^2 J_{n,r}$ et $\Lambda^2 J_{n,r}$ soient irréductibles implique, d'une part que $J_{n,r}^{(i)} = \mathbb{1}$ pour tout $i \neq r$ (donc l'action de $\mathcal{TL}'_n$ sur $J_{n,r}$ se factorise par $\mathfrak{g}_r$), d'autre part (corollaire de la proposition 11) que $\mathfrak{g}_r$ est isomorphe à $\mathfrak{sl}(J_{n,r})$. Comme $\mathcal{TL}_n$ s'injecte dans $\mathfrak{g}_1 \times \ldots\ldots \mathfrak{g}_p$, on en déduit les isomorphismes voulus si $\Bbbk$ est clos. Le cas général se déduit alors, soit du théorème 1, soit de la semi-simplicité de $\mathcal{TL}'_n$ et du corollaire de la proposition 11. cqfd.

L'analogue infinitésimal $\mathfrak{tl}_n$ de l'algèbre de Temperly-Lieb admet donc une décomposition naturelle extrêmement simple, comme produit de facteurs linéaires qui sont chacun munis de l'action de $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathfrak{sl}(J_{n,r}) = J_{n,r} \otimes J_{n,r}^*/\mathbb{1}$.

# 8 Remarques conclusives

Pour tout $n \geq 2$ et $m$ générique,

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}_n \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{BMW}_n(m) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{H}_n \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{TL}_n \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{B}_n \arrow[d] \\
\mathcal{T}_{n+1} \arrow[r] & \mathcal{BMW}_{n+1}(m) \arrow[r] & \mathcal{H}_{n+1} \arrow[r] & \mathcal{TL}_{n+1} \arrow[r] & \mathcal{B}_{n+1}
\end{tikzcd}$$

est un diagramme commutatif de morphismes de $G$-algèbres de Lie dont les flèches horizontales sont surjectives et les flèches verticales injectives. Le programme à réaliser pour comprendre ces quotients infinitésimaux classiques de $B_n$ consisterait à décomposer à leur tour complètement les algèbres de Lie réductives $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{BMW}_n(m)$, au moins pour $m$ générique. Nous décomposons ici $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{BMW}_n(m)$ jusqu'au premier $n$ tel que $\mathcal{H}_n$ (resp. $\mathcal{BMW}_n(m)$) soit de dimension strictement plus grande que $\mathcal{TL}_n$ (resp. $\mathcal{H}_n$).

## 8.1 Décompositions pour $n$ petit

Il est clair, d'après la section 4.1 et les études de $\mathcal{TL}_n$ et $\mathcal{B}_n$, que $\mathcal{TL}_n$ est isomorphe à $\mathcal{H}_n$ pour $n \leq 5$, les diagrammes de Young de taille au plus 5 étant tous, à tensorisation par la représentation alternée près, soit des équerres, soit des diagrammes à deux colonnes. D'autre part, on montre facilement que, pour $m$ générique, $\mathcal{BMW}_3(m)$ est une algèbre de Lie de dimension 12, isomorphe à $\mathbb{Q} \times \mathfrak{sl}_2(\mathbb{Q}) \times \mathfrak{sl}_3(\mathbb{Q})$.

Comme on dispose d'une représentation fidèle de $\mathcal{H}_n$, on peut utiliser des moyens informatiques pour montrer $\dim \mathcal{H}_6 = 249$. La suite des dimensions de $\mathcal{H}_n$ pour $n \geq 2$ commence ainsi par 1,4,12,40,249. Si l'on introduit le morphisme naturel $\Phi : \mathcal{H}_6 \to \mathcal{TL}_6 \times \mathfrak{sl}([3,2,1])$, on montre de la même façon que $\dim \Phi(\mathcal{H}_6) = \dim \mathcal{H}_6$. Enfin, on peut montrer qu'il existe une forme bilinéaire symétrique non dégénérée $\Psi$ sur $[3,2,1]$ (cf. [22], **III**.3.2.3, prop. 32) telle que $\Phi$ se factorise par l'inclusion naturelle

$$I : \mathcal{TL}_6 \times \mathfrak{so}_\Psi([3,2,1]) \hookrightarrow \mathcal{TL}_6 \times \mathfrak{sl}([3,2,1]).$$

Comme $\dim \mathcal{TL}_6 \times \mathfrak{so}_\Psi([3,2,1]) = 249$, on en déduit

$$\mathcal{H}_6 \simeq \mathcal{TL}_6 \times \mathfrak{so}_\Psi([3,2,1]).$$

Comme $\mathfrak{so}_\Psi([3,2,1]) \otimes \mathbb{C} \simeq \mathfrak{so}_{16}(\mathbb{C})$ et que $\mathcal{H}_6$ est déployable, on en déduit

**Proposition 13.** *L'algèbre de Lie $\mathcal{H}_6$ est isomorphe à*

$$\mathbb{Q} \times \mathfrak{sl}_5(\mathbb{Q}) \times \mathfrak{sl}_5(\mathbb{Q}) \times \mathfrak{sl}_9(\mathbb{Q}) \times \mathfrak{so}_{16}(\mathbb{Q}).$$

## 8.2 Algèbres de Cartan

On sait déjà, pour tout $n \geq 2$, définir une sous-algèbre de Cartan déployante de $\mathcal{H}_n$. Pour conclure, nous allons montrer comment construire de façon récursive une sous-algèbre de Cartan explicite de certains facteurs simples, sur deux exemples : les diagrammes de Young à deux colonnes d'une part, qui correspondent d'après le théorème 3 à des facteurs linéaires, et le facteur orthogonal de $\mathcal{H}_6$ que nous venons de rencontrer, $\mathfrak{so}([3,2,1])$. On peut espérer, par cette approche, obtenir des informations supplémentaires sur l'algèbre de Hecke infinitésimale $\mathcal{H}_n$.

### 8.2.1 Diagrammes de Young à deux colonnes

On note $d_{n,r}$ la dimension de $J_{n,r}$. Pour l'action de $\mathcal{H}_n$ sur $J_{n,r}$, on a

$$d_{n,r} T_n = tr(T_n) = \frac{n(n-1)}{2} tr((1\ 2)),$$

et l'on déduit par exemple des formules classiques sur les caractères que l'action, scalaire, de $T_n$ sur $J_{n,r}$, vaut

$$\frac{n^2 - (1+2r)n + 2r(r-1)}{2}.$$

On veut construire de manière itérative, à l'aide de ces éléments, une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{sl}(J_{n,r})$. Supposons que l'on ait construit de telles sous-algèbres pour tout $m < n$, en supposant $n \geq 5$, et fixons $r \in [1, n/2]$. Si $n = 2r$, la restriction à $\mathfrak{S}_{n-1}$, donc la restriction à $\mathcal{H}_{n-1}$, de $J_{n,r}$, est isomorphe à $J_{n-1,r-1}$, et l'on sait par récurrence que l'image de $[\mathcal{H}_{n-1}, \mathcal{H}_{n-1}]$ dans $\mathfrak{sl}(J_{n-1,r-1}) = \mathfrak{sl}(J_{n,r})$ contient une sous-algèbre commutative diagonale de dimension $d_{n-1,r-1} - 1 = d_{n,r} - 1$. Pour $n \neq 2r$, la décomposition de $\mathfrak{S}_{n-1}$-module

$$J_{n,r} = J_{n-1,r-1} \oplus J_{n-1,r}$$

est également une décomposition en tant que $\mathcal{H}_{n-1}$-module. L'image de $\mathcal{H}_{n-1} \subset \mathcal{H}_n$ dans $\mathfrak{sl}(J_{n,r})$ est alors le produit direct de $\mathfrak{sl}(J_{n-1,r-1})$ et de $\mathfrak{sl}(J_{n-1,r})$, d'après l'hypothèse de récurrence. On en déduit une sous-algèbre commutative diagonale de l'image de $\mathcal{H}_n$ dans $\mathfrak{sl}(J_{n,r})$ de dimension

$$d_{n-1,r-1} - 1 + d_{n-1,r} - 1 = d_{n,r} - 2.$$

L'action des éléments de cette algèbre laisse stable $J_{n-1,r-1}$ et $J_{n-1,r}$, et est de trace nulle sur chacun de ces sous-espaces. Nous allons exhiber un élément non nul $C$ de $\mathcal{H}_n$ qui agit scalairement sur ces deux sous-espaces tout en étant de trace nulle, ce dont on déduira immédiatement l'existence, dans l'image de $\mathcal{H}_n$ dans $\mathfrak{sl}(J_{n,r})$, d'une sous-algèbre commutative diagonale de dimension $d_{n,r} - 1$.

D'après la formule obtenue plus haut, on sait écrire l'action de $T_{n-1}$ sur $J_{n,r}$. Elle est scalaire sur chacun des deux sous-espaces $J_{n-1,r-1}$ et $J_{n-1,r}$, et la différence entre ces deux scalaires vaut $2(r-1) - n$ : elle ne peut donc s'annuler ici. De plus, en dehors des cas $(n = 3, r = 1)$ et $(n = 4, r = 2)$, l'action de $T_n$ sur $J_{n,r}$ est un scalaire non nul. On en déduit qu'il existe une combinaison linéaire non nulle de $T_n$ et $T_{n-1}$, dont l'image dans $\mathfrak{gl}(J_{n,r})$ est de trace nulle. Cet élément est non nul dans $\mathfrak{sl}(J_{n,r})$, et est par définition linéairement indépendant de l'image de $[\mathcal{H}_{n-1}, \mathcal{H}_{n-1}]$, qui est isomorphe à $\mathfrak{sl}(J_{n-1,r-1}) \times \mathfrak{sl}(J_{n-1,r})$ : on a ainsi construit une sous-algèbre de Cartan déployante de $\mathfrak{sl}(J_{n,r})$.

### 8.2.2 Le diagramme de Young $[3,2,1]$

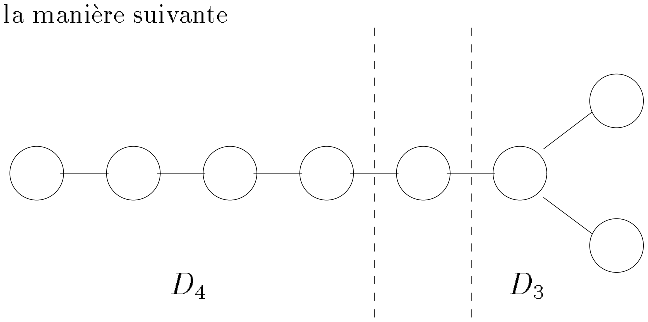
Comme précédemment, on remarque que

$$\mathrm{Res}_{\mathcal{H}_5}[3,2,1] = [3,1,1] \oplus [3,2] \oplus [2,2,1]$$

c'est-à-dire que l'image de $[\mathcal{H}_5, \mathcal{H}_5]$ dans $\mathfrak{so}_\Psi([3,2,1])$ est isomorphe à $\mathfrak{sl}_4(\mathbb{Q}) \times \mathfrak{sl}_5(\mathbb{Q})$, d'où une sous-algèbre commutative diagonale de dimension 7 de $\mathfrak{so}_\Psi([3,2,1])$. Suivant la décomposition précédente, l'action de $T_5$ vaut

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

donc est non nul dans $\mathfrak{sl}([3,2,1])$, donc dans $\mathfrak{so}_\Psi([3,2,1])$, commute à l'algèbre déjà construite, et est diagonale. On en déduit une sous-algèbre commutative diagonale de dimension 8, construite d'une façon que l'on peut représenter visuellement, sur le diagramme de Dynkin $D_8$ de $\mathfrak{so}([3,2,1])$, de la manière suivante




**Remerciements.** Ce texte a pour point de départ mon travail de doctorat, fait sous la direction de Pierre Cartier, qui m'a encouragé à développer ces idées. Je remercie aussi V.G. Turaev et M. Duflo, dont les questions m'ont conduit à compléter ce travail.

# 9 Appendice : actions toriques

Pour étudier les morphismes $\mathcal{T}_n \to \mathbb{Q}\mathfrak{S}_n$ et $\mathcal{T}_n \to Br_n(m)$, nous avons besoin de déterminer la sous-algèbre commutative unifère engendrée par l'image de $T_2, \dots, T_n$ dans les algèbres $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n$ et $Br_n(m)$ pour $m$ générique. Dans les deux cas, nous allons montrer que cette sous-algèbre commutative est maximale. C'est un résultat classique pour $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n$, mais à notre connaissance un résultat nouveau pour l'algèbre de Brauer, que nous utilisons en 3.4. Pour montrer ce dernier résultat, nous mettons en évidence une formule, la « formule de barycentre », qui peut être utile dans d'autres contextes.

## 9.1 Généralités

Notre but est ici d'étudier l'action des éléments $T_2, \dots, T_n$ dans certaines conditions particulières. Pour ce faire, on introduit les éléments $Y_r = T_r - T_{r-1}$ pour $2 \leq r \leq n$ avec la convention $T_1 = 0$, et les éléments $Z_r = 2T_r/r(r-1)$ pour $2 \leq r \leq n$. Il est clair que les familles $(T_2, \dots, T_n)$, $(Z_2, \dots, Z_n)$ et $(Y_2, \dots, Y_n)$ engendrent la même sous-algèbre commutative unifère de $\mathsf{U}\mathcal{T}_n$, que nous appellerons ici sa sous-algèbre torique.

Supposons donné un diagramme commutatif d'algèbres unifères

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{U}\mathcal{T}_1 \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{U}\mathcal{T}_2 \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{U}\mathcal{T}_3 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{U}\mathcal{T}_n \arrow[d] \\
A_1 \arrow[r] & A_2 \arrow[r] & A_3 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & A_n
\end{tikzcd}$$

où les flèches horizontales sont injectives et les flèches verticales surjectives (en particulier, $A_1 = \mathbb{k}$). On suppose de plus

- pour $r < s$, l'image de $t_{rs}$ es conjuguée à celle de $t_{12}$ par un élément inversible de $A_r$. C'est en particulier le cas si les morphismes $\mathsf{U}\mathcal{T}_r$ proviennent par restriction de morphismes $\mathfrak{b}_r \to A_r$.

- chaque $A_r$ est un produit fini d'algèbres de matrices sur $\mathbb{k}$. L'image de tout $T_r$ dans $A_r$ est alors un élément central, qui agit diagonalement sur tout $A_r$-module. En particulier, l'image de la sous-algèbre torique de $\mathsf{U}\mathcal{T}_r$ est une sous-algèbre commutative unifère diagonale de $A_r$.

- respectivement à cette filtration, le diagramme de Bratteli de $A_n$ est sans ramifications. Cela signifie dans le cas présent que, pour $r \geq 2$, la restriction à $A_{r-1}$ de toute représentation irréductible de $A_r$ est sans multiplicités. En conséquence, toute représentation sans multiplicités de $A_n$ admet des bases de Gelfand-Tsetlin. Si l'on considère un modèle de Gelfand de $A_n$, c'est-à-dire la somme directe de ses représentations irréductibles, une sous-algèbre commutative diagonale de $A_n$ admettra pour vecteurs propres les éléments d'une telle base. Il est alors clair qu'une telle sous-algèbre sera maximale si et seulement si elle permet de séparer les vecteurs d'une base de Gelfand-Tsetlin.

## 9.2 L'algèbre de groupe $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n$

Le morphisme $\mathsf{U}\mathcal{T}_n \to \mathbb{Q}\mathfrak{S}_n$ que l'on a défini envoie les éléments $Y_2, \dots, Y_n$ sur des éléments bien connus de l'algèbre de groupe de $\mathfrak{S}_n$, appelés éléments de Jucys-Murphy. La suite naturelle

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}\mathfrak{S}_1 \subset \mathbb{Q}\mathfrak{S}_2 \subset \dots \subset \mathbb{Q}\mathfrak{S}_{n-1}$$

vérifie bien les propriétés requises plus haut, et il est classique que la sous-algèbre commutative unifère de $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n$ engendrée par ces éléments, diagonale, est de plus maximale. Nous redémontrons ici pour la commodité du lecteur ce résultat qui nous sera utile, et nous renvoyons par exemple à Diaconis et Greene [7] pour plus de détails.

Si l'on identifie les représentations irréductibles de $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n$ avec les partitions de $n$, la règle de Young dit que, si $\lambda$ est une partition de $n$, la restriction à $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_{n-1}$ de $\lambda$ est isomorphe à la somme des partitions $\mu$ de $n-1$ telles que $\mu \subset \lambda$. Ici, si $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots)$ et $\mu = (\mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots)$, $\mu \subset \lambda$ signifie que, pour tout $i$, $\mu_i \leq \lambda_i$. Si $M$ est un modèle de Gelfand de $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n$, une base de Gelfand-Tsetlin de $M$ est alors naturellement indexée par des $n$-uplets $\xi = (\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n)$ où $\xi^r$ est une partition de $r$.

Il s'agit donc de montrer que, si l'on connaît les scalaires $\alpha_r$ tels que $Y_r \xi = \alpha_r \xi$, on sait déterminer $\xi^1, \ldots, \xi^n$. Supposons donc que l'on connaisse $\xi^1, \ldots, \xi^s$, avec $1 \leq s < n$ ($\xi^1$ est nécessairement l'unique partition de 1), et le scalaire $\alpha_{s+1}$. Si l'on note

$$\xi^s = (\mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots) \text{ et } \xi^{s+1} = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots),$$

il existe un unique $i$ tel que $\mu_i < \lambda_i$, et cet $i$ détermine $\xi^{s+1}$ à partir de $\xi^s$. Par exemple à partir de formules classiques sur les caractères, on montre que $\alpha_{s+1} = \lambda_i - i = \mu_i - i + 1$ ; comme la suite des $\mu_r - r + 1$ est strictement décroissante et que $\xi^s$ est connu, on déduit de $\alpha_{s+1}$ la connaissance de $\xi^{s+1}$, ce qui conclut la démonstration : l'image de la sous-algèbre torique de $\mathsf{U}\mathcal{T}_n$ est bien maximale dans $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n$. Pour un usage futur remarquons qu'inversement, si l'on connaît $\xi^{s+1}$ et $\alpha_s$, $\xi^s$ est uniquement déterminé.

## 9.3 Formule de barycentre

Supposons donnée une représentation irréductible $\mu$ de $\mathcal{T}_n$ pour $n \geq 2$, dont la restriction à $\mathcal{T}_{n-1}$ soit semi-simple et sans multiplicités. On note $\lambda \nearrow \mu$ pour signifier que $\lambda$ est une composante irréductible de cette restriction. Supposons de plus que $T_{n-1}$ et $T_n$ agissent diagonalement sur $\mu$. Pour toute représentation $\nu$ de $\mathcal{T}_n$, et tout $X \in \mathsf{U}\mathcal{T}_n$, on note $X^\nu$ l'action de $X$ sur $\nu$. L'intérêt de normaliser $T_r$ en $Z_r$ vient de ce qu'alors la trace de $Z_r^\nu$ est égal à la trace de $t_{12}^\nu$, et, sous nos hypothèses,

$$(\dim \mu) Z_n^\mu = tr(Z_n^\mu) = tr(t_{12}^\mu) = \sum_{\lambda \nearrow \mu} (\dim \lambda) Z_{n-1}$$

c'est-à-dire :

**Proposition 14.** (formule de barycentre) *Pour tout $n \geq 3$, on note $\mu$ une représentation irréductible de $\mathcal{T}_n$ sur laquelle $T_n$ et $T_{n-1}$ agissent diagonalement, et dont la restriction à $\mathcal{T}_{n-1}$ est semi-simple sans multiplicités. Alors $(Z_n^\mu, \dim \mu)$ est le barycentre des points pondérés $(Z_{n-1}^\lambda, \dim \lambda)$ pour $\lambda$ parcourant les composantes irréductibles de $\mathrm{Res}_{\mathcal{T}_{n-1}} \mu$.*

## 9.4 L'algèbre de Brauer $Br_n(m)$

Pour tout $n \geq 1$ et $m$ générique, les représentations irréductibles de $Br_n(m)$ sont en bijection avec les diagrammes de Young $\lambda$ de taille $r$ pour $(n-r)/2 \in \mathbb{N}$. On note $\lambda_n$ la représentation de $Br_n(m)$ associée, et on identifie comme précédemment $\lambda$ à une représentation de $\mathfrak{S}_r$. On a $\dim \lambda_n = d_n^r (\dim \lambda)$, avec

$$d_n^r = \begin{pmatrix} n \\ n-r \end{pmatrix} (n-r-1)(n-r-3)\ldots 3.1.$$

Pour tout couple $(\lambda, \mu)$ de diagrammes de Young, la notation $\lambda \subset \mu$ sous-entendra désormais que la taille $|\mu|$ de $\mu$ vaut $|\lambda| + 1$. On a alors la règle

$$\mathrm{Res}_{Br_{n-1}(m)} \lambda_n = \sum_{\mu \subset \lambda} \mu_{n-1} + \sum_{\lambda \subset \mu} \mu_{n-1}$$

si l'on convient que $\mu_r = 0$ pour $r > |\mu|$.

On considère alors un modèle de Gelfand $M$ de $Br_n(m)$, et on veut montrer que l'image de la sous-algèbre torique de $\mathsf{U}\mathcal{T}_n$ est commutative maximale dans $Br_n(m)$. Le fait que, pour $m$ générique, $Br_n(m)$ soit un produit d'algèbre de matrices découle de Wenzl [25] th. 3.2 : on est bien dans le cadre que l'on vient de définir. Une base de Gelfand-Tsetlin de $M$ est alors indexée par des $n$-uplets $(\xi^1, \ldots, \xi^n)$ pour $\xi^r$ représentation irréductible de $Br_n(m)$. Une étude élémentaire de $Br_3(m)$ montre que $Z_2^{[2]_2} = 1$, $Z_2^{[1,1]_2} = -1$, et $Z_2^{[\ ]_2} = 1 - m$. D'après la formule de barycentre, les valeurs propres des éléments $Z_r$ sur $M$ seront alors des fonctions affines de $m$. Comme la propriété de séparer ces $n$-uplets est ouverte, et que l'on ne s'intéresse qu'à la situation où $m$ est générique, il suffit de démontrer cette propriété pour une valeur particulière de $m$ dans $\mathbb{C}$ : on choisit $1-m = i$, avec $i^2 = -1$.

On note $R_n^\lambda$ (resp. $I_n^\lambda$) la partie réelle (resp. imaginaire) de la valeur $Z_n^{\lambda_n}$ de $Z_n$ sur la représentation irréductible $\lambda_n$.

## 9.5 Partie imaginaire

D'après la formule de barycentre, il est clair que $I_n^\lambda = 0$ si $\lambda$ est de taille $n$. Plus généralement, pour $n \geq 2$,

**Lemme 5.** *Les scalaires $I_n^\lambda$ ne dépendent que de $n$ et de la taille $r$ de $\lambda$. On peut donc noter $I_n^\lambda = I_n(r)$. De plus, pour $r < n+1$,*

$$I_{n+1}(r) = \frac{rI_n(r-1) + (n+1-r)I_n(r+1)}{n+1}.$$

*Preuve* — Le cas $n = 2$ se vérifie immédiatement. On a $I_2(2) = 0$ et $I_2(0) = 1$. On suppose donc $n \geq 2$, et on va montrer cet énoncé au rang $n+1$. Soit $\lambda$ une partition de $r = n - 2h$. D'après la remarque précédente, on peut supposer $h > 0$. On a, d'après l'hypothèse de récurrence et la formule de barycentre,

$$I_{n+1}^\lambda = \frac{\left(\sum_{\mu \subset \lambda} \dim \mu_n\right) I_n(r-1) + \left(\sum_{\lambda \subset \mu} \dim \mu_n\right) I_n(r+1)}{\dim \lambda_{n+1}}.$$

De plus,

$$\sum_{\mu \subset \lambda} \dim \mu_n = d_n^{r-1} \sum_{\mu \subset \lambda} \dim \mu = d_n^{r-1} \dim \mathrm{Res}\lambda = d_n^{r-1} \dim \lambda$$
$$\sum_{\lambda \subset \mu} \dim \mu_n = d_n^{r+1} \sum_{\lambda \subset \mu} \dim \mu = d_n^{r+1} \dim \mathrm{Ind}\lambda = d_n^{r+1}(r+1) \dim \lambda,$$

d'où l'on déduit après simplifications que $I_{n+1}^\lambda$ ne dépend que de $n$ et de la taille de $\lambda$, et est donné par la formule de l'énoncé. On conclut par récurrence. cqfd.

En particulier, $I_{n+1}(r)$ appartient au segment ouvert de $\mathbb{R}$ compris entre $I_n(r-1)$ et $I_n(r+1)$ ; on en déduit immédiatement que, à $n$ fixé, la donnée de $I_n^\lambda$ permet de déterminer la *taille de* $\lambda$.

## 9.6 Partie réelle

Si $V$ est un $\mathfrak{S}_n$-module, on note $\chi_V$ le caractère de $\mathfrak{S}_n$ associé à $V$, que l'on considère comme une forme linéaire sur $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n$. On note dans cet appendice $J_n$ la somme des transpositions de $\mathfrak{S}_n$, normalisée de façon à être l'image de $Z_n$ dans $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n$, c'est-à-dire que $\chi_V(J_n) = \chi_V((1\ 2))$ pour tout $\mathfrak{S}_n$-module $V$. Par convention, $J_1 = J_0 = 0$. On déduit alors de la théorie des représentations de $\mathfrak{S}_n$ (cf. par exemple [12] p. 34 ex. 3.19), que

$$\chi_{\mathrm{Ind}V}(J_{n+1}) = \chi_{\mathrm{Ind}V}((1\ 2) = (n-1)\chi_V((1\ 2)) = (n-1)\chi_V(J_n),$$

où « Ind » désigne l'induction de $\mathfrak{S}_n$ à $\mathfrak{S}_{n+1}$.

Si $\lambda$ est une partition de $n$, on note $J^\lambda$ l'action scalaire de $J_n$ sur $S^\lambda$. Remarquons que, pour tout $\lambda_n$, $R_n^{\lambda'} = -R_n^\lambda$, si $\lambda'$ désigne le diagramme de Young dual de $\lambda$. De plus,

**Lemme 6.** *Il existe une famille de scalaires $\alpha_n^r \in \mathbb{Q}$ telle que*

$$R_n^\lambda = \alpha_n^r J^\lambda$$

*si $\lambda$ est une partition de $r$. De plus, pour $1 < r < n+1$, on a*

$$\frac{n+1}{r(n+1-r)}\alpha_{n+1}^r = \frac{r-1}{r(r+1)}\alpha_n^{r+1} + \frac{1}{n-r+1}\alpha_n^{r-1}.$$

*Preuve —* Si $r = n$, c'est immédiat et $\alpha_n^n = 1$. Si $r \leq 1$, il est clair que, comme [ ] et [1] sont autoduaux, $R_n^{[\,]} = R_n^{[\,]'} = 0$ pour $n$ pair et $R_n^{[1]} = 0$ pour $n$ impair. On peut alors poser, pour tout $n$, $\alpha_n^0 = 0$ et $\alpha_n^1 = 0$ On démontre ensuite le lemme par récurrence sur $n$. Le cas $n = 2$ est immédiat. Pour $r \geq 2$, en utilisant

$$\sum_{\lambda \subset \mu} (\dim \mu) J^\mu = \chi_{\mathrm{Ind}\lambda}(J_{r+1}) = (r-1)\chi_\lambda(J_r) = (r-1)(\dim \lambda) J^\lambda$$
$$\sum_{\mu \subset \lambda} (\dim \mu) J^\mu = \chi_{\mathrm{Res}(\lambda)}(J_{r-1}) = \chi_\lambda((12)) = \chi_\lambda(J_r) = (\dim \lambda) J^\lambda$$

on déduit de la formule de barycentre la conclusion de l'énoncé au rang $n+1$, et on conclut par récurrence. cqfd.

On déduit immédiatement de la formule donnée dans le lemme précédent que $\alpha_n^r > 0$ dès que $r > 1$.

## 9.7 Un tore de $Br_n(m)$

Nous concluons des études précédentes le résultat principal de cet appendice :

**Théorème 4.** *Pour $n \geq 2$, l'image dans $Br_n(m)$ des éléments $T_2, \ldots, T_n$ de $\mathsf{U}\mathcal{T}_n$ engendre en tant qu'algèbre unifère, pour $m$ générique, une sous-algèbre commutative maximale de $Br_n(m)$.*

*Preuve —* Il suffit de montrer que, si l'on a un $n$-uplet $(\xi^1, \ldots, \xi^n)$ où chaque $\xi^r$, représentation irréductible de $Br_r(m)$, correspond à un diagramme de Young $\lambda^r$, la donnée des valeurs $a_r = Z_r^{\lambda^r}$ permet de déterminer le $n$-uplet donné. On connaît déjà $\xi^1 = [1]_1$, donc $\lambda^1 = [1]$. D'après le lemme 5 et la remarque qui suit, on sait déduire les tailles $m_r$ des différents $\lambda^r$ de la partie imaginaire de $a_r$. Pour tout $r$, si $m_r \in \{0,1\}$, on sait en déduire $\lambda_r$ : il n'y a en effet qu'un diagramme de Young de taille 1 (resp. 0). Sinon, on suppose par récurrence que l'on connaît $\lambda^{r-1}$, et que l'on veut déterminer $\lambda^r$. On est dans l'un des deux cas suivants : soit $\lambda^{r-1} \subset \lambda^r$, soit $\lambda^r \subset \lambda^{r-1}$, suivant que $|\lambda^{r-1}| < |\lambda_r|$ ou $|\lambda_r| > |\lambda_{r-1}|$. D'après le lemme 6, on connaît la valeur de $J_r$ sur $\lambda^r$, donc l'action de la somme des transpositions sur $\lambda_r$. On a vu lors de l'étude de $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n$ (9.2) que cette valeur permet de déterminer $\lambda^{r-1}$ en fonction de $\lambda^r$, ce qui conclut. cqfd.

## Références


[1] J. Birman, K.H. Ko, S.J. Lee, *A new approach to the word and conjugacy problems in the braid groups*, Adv. Math. 139 (1998), no. 2, 322–353.

[2] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, ch. 1, Hermann, 1960.

[3] R. Brauer, *On algebras which are connected with the semisimple continuous groups*, Annals of Math. (2) 38 (1937), 857-872.

[4] M. Broué, G. Malle *Zyclotomische Heckealgebren*, Astérisque 212 (1993) 7-92.

[5] C. W. Curtis, N. Iwahori, R. Kilmoyer, *Hecke algebras and characters of parabolic type of finite groups with* $(B, N)$*-pairs*, Inst. Hautes tudes Sci. Publ. Math. No. 40, (1971), 81–116.

[6] P. Deligne, *Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points*, in Galois groups over $\mathbb{Q}$, MSRI Publ. 16, Springer-Verlag 1989, 79-287.

[7] P. Diaconis et C. Greene, Applications of Murphy's elements, inédit (1989).

[8] V.G. Drinfeld, *Quasi-Hopf algebras*, Leningrad Math. J. 1 (1990) no. 6, 1419-1457.

[9] V.G. Drinfeld, *On quasitriangular quasi-Hopf algebras and on a group that is closely connected with* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, Leningrad Math. J. 2 (1991), no. 4, 829–860.

[10] F.M. Goodman, P. de la Harpe, V.F.R. Jones, *Coxeter Graphs and Towers of Algebras*, MSRI Publ. 14, Springer-Verlag 1989.

[11] El Houari, *Nouvelle classification des (super-)algèbres de Lie simples par le biais de leurs invariants tensoriels*, Thèse de l'université Paris XI-Orsay, 1994.

[12] W. Fulton, J. Harris, *Representation theory, a first course* GTM 129, Springer-Verlag, 1991.

[13] R.M. Hain, *On a generalization of Hilbert's 21st problem*, Ann. Sci. E.N.S. 4e sér. t.19, 1986, 609-627.

[14] P. Hanlon, *On the decomposition of the tensor algebra of the classical Lie algebras*, Adv. in Math. 56 (1985) no. 3, 238-282.

[15] V.F.R. Jones, *Polynomial invariants of knots via von Neumann algebras*, Bull. AMS. **12** (1985), 103-111.

[16] C. Kassel, *Quantum groups*, GTM 155, Springer-Verlag, 1995.

[17] T. Kohno, *Monodromy representations of braid groups and Yang-Baxter equations*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 37 (1987), no. 4, 139–160.

[18] T. Kohno, *Linear representations of braid groups and classical Yang-Baxter equations*, in *Braids* (Santa Cruz, CA, 1986), 339–363, Contemp. Math., 78, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.

[19] T. Kohno, *Série de Poincaré-Koszul associée au groupe de tresses pures*, Invent. Math. 82 (1985), 57-75.

[20] Lappo-Danilevskii, *Mémoires sur la théorie des systèmes des équations différentielles linéaires*, réédition Chelsea 1953.

[21] I. Marin, *Une caractérisation tensorielle des représentations standard*, Expositiones Mathematicæ, **18** (2000), 243-254.

[22] I. Marin, *Représentations linéaires des tresses infinitésimales*, Thèse de l'université Paris XI-Orsay, 2001.

[23] I. Marin, *On KZ-systems which are irreducible under the action of the symmetric group*, Comptes Rendus Acad. Sci., **333** Série I (2001), 517-522.

[24] J. Tits, *Normalisateurs de tores I. Groupes de Coxeter étendus*, J. Alg **4** (1966), 96-116.

[25] H. Wenzl, *On the structure of Brauer's centralizer algebras*, Ann. of Math. (2) 128 (1988), 173-193.