

L'algèbre de Lie des transpositions

Ivan Marin

8 mars 2006

Résumé. Pour tout $n \geq 3$ on obtient la décomposition en facteurs simples de la sous-algèbre de Lie de l'algèbre de groupe du groupe symétrique sur n lettres engendrée par les transpositions. Cela nous permet de déterminer l'enveloppe algébrique du groupe de tresses $\mathbf{B}_n$ et de certains de ses sous-groupes dans les représentations de l'algèbre de Iwahori-Hecke de type A.

Abstract. For any $n \geq 3$ we obtain the decomposition in simple factors of the Lie subalgebra of the group algebra of the symmetric group on n letters generated by the transpositions. This enables us to determine the algebraic hull of the braid group $\mathbf{B}_n$ and of several of its subgroups inside the representations of the Iwahori-Hecke algebra of type A.

1 Motivations

On note $\mathbf{B}_n$ le groupe de tresses à n brins. Des actions de $\mathbf{B}_n$ se rencontrent dans les domaines les plus variés de la géométrie et de l'algèbre. En particulier, quatre types de représentations (dépendant d'un ou deux paramètres génériques) sont particulièrement fréquents :

1. La représentation de Burau
2. Les représentations de l'algèbre de Temperley-Lieb
3. Les représentations de l'algèbre d'Iwahori-Hecke de type A
4. Les représentations de l'algèbre de Birman-Wenzl-Murakami

Chacun de ces types de représentations est un cas particulier des suivantes. Les représentations des algèbres semi-simples correspondantes, qui induisent des représentations du groupe de tresses, sont bien connues en tant que représentations d'algèbres. En revanche, la structure d'algèbre ne permet pas de comprendre les décompositions en irréductibles des produits tensoriels de ces représentations, en tant que représentations du groupe de tresses. De même, elle ne permet pas de déterminer l'enveloppe algébrique du groupe de tresses dans chacune de ces représentations.

Pour décomposer ces produits tensoriels, on a montré dans [Ma03a] qu'il suffit de savoir décomposer en facteurs simples des algèbres de Lie « infinitésimales » naturellement associées à ces structures. Cette tâche a été accomplie pour la représentation de Burau et l'algèbre de Temperley-Lieb pour tout n , ainsi que pour l'algèbre d'Iwahori-Hecke pour $n \leq 6$. On y a de plus montré que l'algèbre de Lie correspondant à l'algèbre d'Iwahori-Hecke admet une description particulièrement simple, précisément qu'il s'agit de la sous-algèbre de Lie de

l'algèbre du groupe du groupe symétrique, considérée comme algèbre de Lie pour le crochet $[a, b] = ab - ba$, qui est engendrée par les transpositions.

C'est cette algèbre de Lie que nous décomposons ici (théorème A) pour tout entier n . Nous en déduisons (théorème B) l'enveloppe algébrique de l'image du groupe de tresses et de plusieurs de ses sous-groupes dans chacune des représentations irréductibles de l'algèbre d'Iwahori-Hecke de type A, puis dans l'algèbre d'Iwahori-Hecke elle-même (théorème C).

La décomposition particulièrement simple de cette algèbre de Lie permet d'envisager le même travail pour l'algèbre de Birman-Wenzl-Murakami, mais également pour les algèbres de Hecke infinitésimales associées aux autres groupes de réflexions, qui ont été introduites dans [Ma03b].

Le théorème A, établissant la décomposition de l'algèbre de Lie des transpositions, est énoncé en section 2. La section 3 est composée de résultats préliminaires sur les diagrammes de Young. Le but des sections 4, 5 et 6 est de démontrer ce théorème. En section 4 nous plongeons cette algèbre de Lie dans une algèbre de Lie réductive explicitement décomposée. Les sections 5 et 6 sont consacrées à la démonstration de la surjectivité de ce plongement, ce qui conclut la démonstration du théorème. Les sections suivantes sont consacrées à l'application de ce théorème aux calculs d'enveloppes algébriques (théorèmes B et C).

2 Résultat principal

2.1 Notations

On rappelle qu'une partition λ de l'entier n est une suite $(\lambda_r)_{r \geq 1}$ d'entiers naturels presque tous nuls, tels que $\lambda_r \geq \lambda_{r+1}$ pour tout $r \geq 1$, et dont la somme vaut n . On appellera plus généralement partition une suite $\lambda = (\lambda_r)_{r \geq 1}$ d'entiers naturels presque tous nuls, tels que $\lambda_r \geq \lambda_{r+1}$ pour tout $r \geq 1$. C'est une partition d'un certain entier n , que l'on appelle la taille de la partition et que l'on note $|\lambda|$. On utilisera la notation classique $\lambda \vdash n$ pour indiquer que λ est une partition de n , et la notation $[\lambda_1, \dots, \lambda_r]$ pour désigner la partition $\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots$. Une extension commode de cette notation que nous utiliserons également consiste à noter a^b une juxtaposition de b fois le nombre a . Ainsi, $[4, 2^3] = [4, 2, 2, 2]$.

Si $\lambda \vdash n$ est une partition de l'entier naturel n , on note λ' la partition symétrique de λ , définie par $\lambda'_r = \max\{i \geq 1 \mid \lambda_i \geq r\}$, en convenant que $\max \emptyset = 0$. Si $\lambda = \lambda'$, on dit que λ est une partition *symétrique*.

Soit $\mathbb{k}$ un corps de caractéristique 0. La théorie classique des représentations du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ (cf. par exemple [FH91]) associe à toute partition λ de n un $\mathbb{k}\mathfrak{S}_n$ -module simple (de dimension finie sur $\mathbb{k}$), bien déterminé à isomorphisme près. Par exemple, à la partition $[n]$ de n correspond le $\mathbb{k}\mathfrak{S}_n$ -module trivial de dimension 1. Plus généralement, pour tout $0 \leq r \leq n$, les partitions de la forme $[n - r, 1^r]$, appelées des *équerres*, correspondent à des représentations particulières de $\mathfrak{S}_n$. Nous appellerons les partitions qui ne sont pas des équerres des partitions *propres*.

Par souci de lisibilité, on identifiera λ à ce $\mathbb{k}\mathfrak{S}_n$ -module simple. On notera ainsi $\dim(\lambda)$ la dimension sur $\mathbb{k}$ de ce module, et $\mathfrak{sl}(\lambda)$, $\mathfrak{gl}(\lambda)$ les algèbres de Lie spéciale linéaire et linéaire sur l'espace vectoriel sous-jacent. On utilisera la notation ρ_λ pour désigner la représentation associée à λ , c'est-à-dire le morphisme $\mathfrak{S}_n \rightarrow GL(\lambda) \subset \text{End}_{\mathbb{k}}(\lambda)$.

Pour un entier n , on note E_n l'ensemble des partitions propres λ de n telles que $\lambda \neq \lambda'$, F_n l'ensemble des partitions propres symétriques. On note $\sim$ la relation d'équivalence sur E_n

qui identifie λ à λ' . Munissant l'ensemble des partitions de n de l'ordre lexicographique, on peut alors identifier $E_n/\sim$ à l'ensemble $\{\lambda \vdash n \mid \dim(\lambda) > 1 \text{ et } \lambda < \lambda'\}$.

2.2 L'algèbre de Lie des transpositions

Définition 1. Pour tout $n \geq 3$, on note $\mathfrak{g}_n$ la sous-algèbre de Lie de $\mathbb{k}\mathfrak{S}_n$ engendrée par les transpositions, $\mathfrak{g}'_n = [\mathfrak{g}_n, \mathfrak{g}_n]$ son algèbre dérivée et $\mathfrak{g}_\lambda$ l'image de $\mathfrak{g}'_n$ dans les endomorphismes de λ .

L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_n$ admet des ensembles de générateurs plus petits. Le lemme suivant, qui découle aisément de l'identité $\text{ad}(s) \circ \text{ad}(s) = 2 - 2\text{Ad}(s)$ dans $\mathfrak{g}_n$ pour s une transposition, où $\text{ad}(x)(y) = [x, y]$ et $\text{Ad}(x)(y) = xyx^{-1}$, nous sera notamment utile dans la preuve du lemme 11.

Lemme 1. $\mathfrak{g}_n$ est engendrée par la famille des transpositions consécutives $(i \ i+1)$. Elle est également engendrée par la famille des transpositions $(i \ n)$ pour $1 \leq i \leq n-1$.

La proposition suivante, établie dans [Ma01a, Ma03a], montre que l'étude de $\mathfrak{g}_n$ et de ses représentations se ramène à celle de $\mathfrak{g}'_n$:

Proposition 1. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_n$ est réductive, et son centre est de dimension 1, engendré par la somme T_n de toutes les transpositions. En conséquence $\mathfrak{g}_n \simeq \mathbb{k} \times \mathfrak{g}'_n$, et l'image de $\mathfrak{g}_n$ dans $\mathfrak{gl}(\lambda)$ est $\mathfrak{g}_\lambda \subset \mathfrak{sl}(\lambda)$ si T_n agit par 0, et $\mathbb{k} \times \mathfrak{g}_\lambda$ sinon.

Si l'on note $p : \mathbb{k}\mathfrak{S}_n \rightarrow Z(\mathbb{k}\mathfrak{S}_n)$ la projection de $\mathbb{k}\mathfrak{S}_n$ sur son centre, définie par

$$p(x) = \frac{1}{n!} \sum_{s \in \mathfrak{S}_n} sx s^{-1},$$

alors l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_n$ est p -stable parce qu'engendrée par une classe de conjugaison de $\mathfrak{S}_n$, et on a $\mathbb{k}T_n = Z(\mathfrak{g}_n) = p(\mathfrak{g}_n)$. Ainsi, $\mathfrak{g}'_n$ s'identifie au noyau de la restriction de p à $\mathfrak{g}_n$.

Nous verrons en section 4.4 comment calculer l'action de T_n sur chacune des représentations de $\mathfrak{S}_n$. Indépendamment de ce calcul, on peut montrer que les restrictions à $\mathfrak{g}'_n$ de deux représentations non isomorphes de $\mathbb{k}\mathfrak{S}_n$ ne sont pas isomorphes en général :

Proposition 2. Soient $n \geq 2$ et R_1, R_2 deux représentations absolument irréductibles de $\mathbb{k}\mathfrak{S}_n$ de dimension au moins 2. On a équivalence

- (i) R_1 et R_2 sont isomorphes en tant que représentations de $\mathfrak{S}_n$.
- (ii) R_1 et R_2 sont isomorphes en tant que représentations de $\mathfrak{g}_n$.
- (iii) R_1 et R_2 sont isomorphes en tant que représentations de $\mathfrak{g}'_n$.

Démonstration. Les implications (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) sont immédiates puisque $\mathfrak{g}'_n \subset \mathfrak{g}_n \subset \mathbb{k}\mathfrak{S}_n$. Notons $R_i : \mathbb{k}\mathfrak{S}_n \rightarrow \text{End}(V_i)$. On a par hypothèse $\dim(V_1) > 1$. Supposons (iii), c'est-à-dire qu'il existe $P \in \text{Hom}(V_1, V_2)$ bijectif tel que, pour tout $x \in \mathfrak{g}'_n$, on ait $PR_1(x) = R_2(x)P$.

A toute transposition s on associe $s' = s - 2T_n/n(n-1)$. Comme les $n(n-1)/2$ transpositions de $\mathfrak{S}_n$ forment une classe de conjugaison, on a $p(s) = 2T_n/n(n-1)$ et $p(T) = T$ donc $p(s') = 0$ soit $s' \in \mathfrak{g}'_n$. D'autre part, T_n est central dans $\mathbb{k}\mathfrak{S}_n$ donc $R_1(T)$ et $R_2(T)$ sont scalaires par absolue irréductibilité de ces deux représentations. De $R_2(x) = PR_1(x)P^{-1}$ pour tout $x \in \mathfrak{g}'_n$ on déduit en particulier que, pour toute transposition s , on a

$$R_2(s) - \frac{2}{n(n-1)}R_2(T) = PR_1(s)P^{-1} - \frac{2}{n(n-1)}R_1(T)$$

c'est-à-dire $R_2(s) = PR_1(s)P^{-1} + \omega$ avec $\omega = 2(R_2(T_n) - R_1(T_n))/n(n-1) \in \mathbb{k}$ indépendant de s . En élevant au carré on en déduit $1 = R_2(s^2) = 1 + 2PR_1(s)P^{-1} + \omega^2$. Si $\omega \neq 0$, alors $R_1(s)$ serait scalaire pour toute transposition s , donc pour toute permutation; ainsi $R_1(\mathfrak{S}_n) \subset \mathbb{k}^\times$, ce qui contredirait l'irréductibilité de l'action de $\mathfrak{S}_n$ sur V_1 puisque $\dim V_1 > 1$. Ainsi $\omega = 0$, c'est-à-dire $R_2(s) = PR_1(s)P^{-1}$ pour toute transposition s , donc pour toute permutation et R_1 est bien isomorphe à R_2 comme représentation de $\mathfrak{S}_n$. $\square$

On notera encore ρ_λ la représentation $\mathfrak{g}_n \rightarrow \mathfrak{gl}(\lambda)$ associée à λ . Par définition, sa restriction à $\mathfrak{g}'_n$ se factorise par $\mathfrak{g}_\lambda$.

2.3 Énoncé du théorème A

Nous définirons en section 4.2, pour toute partition symétrique λ , une algèbre de Lie $\mathfrak{osp}(\lambda)$, et un morphisme injectif

$$\phi_n : \mathfrak{g}'_n \hookrightarrow \mathfrak{sl}_{n-1}(\mathbb{k}) \times \left(\prod_{\lambda \in E_n / \sim} \mathfrak{sl}(\lambda) \right) \times \left(\prod_{\lambda \in F_n} \mathfrak{osp}(\lambda) \right)$$

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème

Théorème A. *Pour tout $n \geq 3$, ϕ_n est surjectif. En particulier,*

$$\mathfrak{g}'_n \simeq \mathfrak{sl}_{n-1}(\mathbb{k}) \times \left(\prod_{\lambda \in E_n / \sim} \mathfrak{sl}(\lambda) \right) \times \left(\prod_{\lambda \in F_n} \mathfrak{osp}(\lambda) \right)$$

et les représentations ρ_λ de $\mathfrak{g}'_n$ sont deux à deux non isomorphes.

3 Préliminaires sur les diagrammes de Young

On représente habituellement les partitions par des diagrammes de Young. On utilisera la convention telle que $[3, 2]$ est associée au diagramme à deux colonnes et trois lignes suivante :

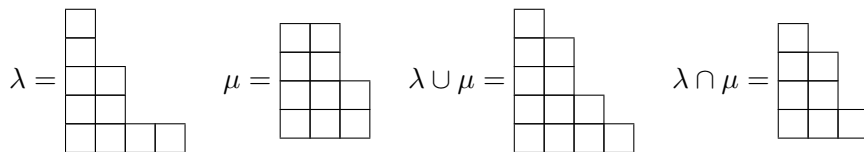


Si λ est une partition, on notera encore λ le diagramme de Young associé.

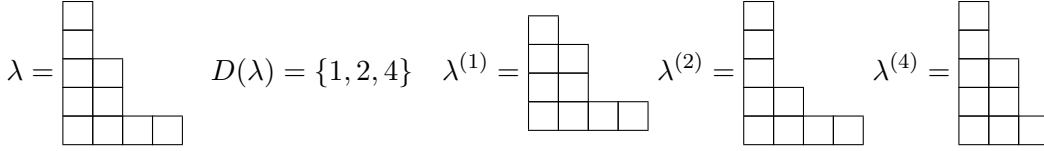
Si λ, μ sont deux partitions, on utilise les notations suivantes :

- $\mu \subset \lambda$ si $\forall i \mu_i \leq \lambda_i$.
- $\mu \nearrow \lambda$ si $\mu \subset \lambda$ et $|\lambda| = |\mu| + 1$.
- On note $\nu = \mu \cup \lambda$ la partition définie par $\nu_i = \max(\lambda_i, \mu_i)$.
- On note $\nu = \mu \cap \lambda$ la partition définie par $\nu_i = \min(\lambda_i, \mu_i)$.

Comme exemple de ces deux dernières notations :



L'ensemble des *décrochements* de λ est $D(\lambda) = \{i | \lambda_{i+1} < \lambda_i\}$. On note $\delta(\lambda) = \#D(\lambda)$ le nombre de décrochements de λ . A tout décrochement r de $\lambda \vdash n$ on peut associer $\lambda^{(r)} \nearrow \lambda$ définie par $\lambda_r^{(r)} = \lambda_r - 1$ et $\lambda_i^{(r)} = \lambda_i$ si $i \neq r$. Par exemple,



On appelle longueur de la diagonale de λ et on note $b(\lambda)$ le nombre $b(\lambda) = \max\{i | \lambda_i \geq i\}$. Dans l'exemple précédent, $b(\lambda) = 2$. Il est clair que, si $\mu \subset \lambda$, on a $b(\mu) \leq b(\lambda)$, et que si $\mu \nearrow \lambda$, on a $b(\mu) \in \{b(\lambda), b(\lambda) - 1\}$ avec $b(\mu) = b(\lambda) - 1$ ssi $\mu = \lambda^{(b(\lambda))}$. On remarque que $b(\lambda) = 1$ signifie que $\lambda = [n - r, 1^r]$ pour un certain $0 \leq r \leq n$, c'est-à-dire que λ est une *équerre*. On rappelle que dans le cas contraire on dit que λ est propre, que E_n désigne l'ensemble des partitions propres non symétriques ($\lambda \neq \lambda'$) et F_n celui des partitions propres symétriques.

Le lemme suivant est visuellement évident :

Lemme 2. *L'application $r \mapsto \lambda_r$ induit une bijection $D(\lambda) \rightarrow D(\lambda')$. En particulier, $\delta(\lambda) = \delta(\lambda')$. Si $r \in D(\lambda)$ et $c = \lambda_r$, on a $(\lambda')^{(c)} = (\lambda^{(r)})'$. Enfin $b(\lambda) = b(\lambda')$.*

Démonstration. Soit $r \in D(\lambda)$, $c = \lambda_r$. On a $\lambda'_c = \#\{i | \lambda_i \geq c\} = \#\{i | \lambda_i \geq \lambda_r\} = r$ car $\lambda_r > \lambda_{r+1}$, et $\lambda'_{c+1} = \#\{i | \lambda_i \geq c + 1\} = \#\{i | \lambda_i > \lambda_r\} \leq r - 1$, donc $\lambda'_{c+1} > \lambda'_c$ et $c \in D(\lambda')$. D'autre part $\lambda'_c = r$ s'écrit $r = \lambda'_{\lambda_r}$ donc la composée $D(\lambda) \rightarrow D(\lambda') \rightarrow D(\lambda'') = D(\lambda)$ est l'identité et $D(\lambda) \rightarrow D(\lambda')$ est bijective.

Soit $\mu = \lambda^{(r)}$. Si $s \neq c$, l'inégalité $\mu_i \geq s$ signifie $\lambda_i \geq s$ pour tout $i \neq r$. Si $i = r$ on a $\mu_r = c - 1$ et $\lambda_r = c$. Pour $s > c$ on a $\mu_r < s$ et $\lambda_r < s$, et pour $s < c - 1$ on a $\mu_r \geq c - 1$ et $\lambda_r \geq c - 1$ donc $\mu'_i = \#\{i | \mu_i \geq s\} = \#\{i | \lambda_i \geq s\} = \lambda'_i$. Si $s = c$, on a $\mu'_c = \#\{i | \mu_i \geq c\} = r - 1 = \lambda'_c - 1$, donc $(\lambda^{(r)})' = \mu' = (\lambda')^{(c)}$.

Enfin, $b(\lambda)$ est tel que $\lambda_{b(\lambda)} \geq b(\lambda)$. Alors $\lambda'_{b(\lambda)} = \#\{i | \lambda_i \geq b(\lambda)\} \geq b(\lambda)$. On en déduit $b(\lambda') \geq b(\lambda)$ d'où $b(\lambda) = b(\lambda')$ puisque $\lambda'' = \lambda$. $\square$

On note $P(\lambda) = \{\lambda^{(r)} | r \in D(\lambda)\} = \{\nu | \nu \nearrow \lambda\}$. On a $\#P(\lambda) = \delta(\lambda)$. On déduit du lemme précédent

Lemme 3. *Si $\lambda = \lambda'$, pour tout $\mu \in P(\lambda)$ on a $\mu' \in P(\lambda)$.*

Démonstration. Si $\mu \in P(\lambda)$, c'est-à-dire s'il existe $r \in D(\lambda)$ tel que $\mu = \lambda^{(r)}$, alors $\mu' = (\lambda^{(r)})' = (\lambda')^{\lambda_r} \in P(\lambda') = P(\lambda)$. $\square$

Dans le lemme qui suit sont regroupés un certain nombre d'autres résultats combinatoires utiles. Pour sa démonstration on utilisera la notation suivante. Si $\lambda \vdash n$, on notera $\lambda = [\mathbf{a}, \mathbf{c}, b]$ avec $b = b(\lambda)$, $\mathbf{a}$ et $\mathbf{c}$ deux diagrammes de Young avec $|\lambda| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{c}| + b^2$, $\mathbf{a}$ et $\mathbf{c}$ étant déterminés par $\lambda_i = b(\lambda) + \mathbf{a}_i$ et $\lambda'_i = b(\lambda) + \mathbf{c}_i$ pour $i \leq b(\lambda)$. On a $\lambda' = [\mathbf{c}, \mathbf{a}, b]$ (cf. figure 1).

Lemme 4. 1. *Si $b(\lambda) = 2$, alors $\#\{\mu \in P(\lambda) | b(\mu) < 2\} \leq 1$*

2. *Si $\lambda \in F_n$, alors $P(\lambda) \cap F_n = \{\lambda^{(b(\lambda))}\}$ si $b(\lambda) \in D(\lambda)$, et est vide sinon.*

3. *Si $\lambda \neq \lambda'$ et $\mu \neq \mu'$ avec $\mu \in P(\lambda)$, alors $\mu' \notin P(\lambda)$*



FIG. 1 – Les diagrammes $\lambda = [\mathbf{a}, \mathbf{c}, b]$ et $\lambda' = [\mathbf{c}, \mathbf{a}, b]$

4. $\#P(\lambda) \cap F_n \in \{0, 1\}$

Démonstration. 1. Si $b(\lambda) = 2$ et $\mu \nearrow \lambda$ tel que $b(\mu) = 1$, alors $\mu = \lambda^{(b(\lambda))}$.

2. Si $\mu \nearrow \lambda$ et $b(\mu) < b(\lambda)$, on a $\mu = \lambda^{(b(\lambda))}$. Supposons au contraire $b(\mu) = b(\lambda) = b$, et écrivons $\lambda = [\mathbf{a}, \mathbf{a}, b]$ et $\mu = [\mathbf{u}, \mathbf{u}, b]$. On a alors $|\mathbf{u}| = |\mathbf{a}| - 1$ d'où $|\mu| = |\lambda| - 2$ ce qui est exclu.

3. Soient $\lambda \neq \lambda'$, $\mu \neq \mu'$, $\mu \in P(\lambda)$ et supposons par l'absurde $\mu' \in P(\lambda)$. Si $b(\mu) < b(\lambda)$, $\mu = \lambda^{(b(\lambda))}$ et $\lambda_{b(\lambda)} = b(\lambda) = \lambda'_{b(\lambda)}$. Posons $\mu = [\mathbf{a}, \mathbf{c}, b(\mu)]$. On peut supposer $\lambda = [\mathbf{a}^+, \mathbf{c}, b(\lambda)]$ avec $\mathbf{a} \nearrow \mathbf{a}^+$ si $b(\mu) = b(\lambda)$, et $\mathbf{a} = \mathbf{a}^+$ sinon. Comme $\mu' \subset \lambda$ on a $\mathbf{c} \subset \mathbf{a}^+$, et $\mathbf{a} \subset \mathbf{c}$. Si $\mathbf{a} = \mathbf{a}^+$ on en déduit $\mathbf{a} = \mathbf{c}$ donc $\mu = \mu'$, ce qui est exclu. Sinon, on a $|\mathbf{a}^+| = |\mathbf{a}| + 1$ donc $\mathbf{a} = \mathbf{c}$ ce qui est exclu pour la même raison, ou bien $\mathbf{a}^+ = \mathbf{c}$ qui est encore exclu car $\lambda \neq \lambda'$.

4. Soit $\lambda = [\mathbf{a}, \mathbf{c}, b(\lambda)]$. Soient $\mu, \nu \in P(\lambda) \cap F_n$ avec $\mu \neq \nu$. Si $b(\mu) < b(\lambda)$, on a $\mu = \mu' \Rightarrow \lambda = \lambda'$. Comme $\mu \neq \nu$, on a $b(\nu) = b(\lambda) = b$, donc $\lambda = [\mathbf{a}, \mathbf{a}, b]$, $\nu = [\mathbf{u}, \mathbf{u}, b]$, $\mu = [\mathbf{a}, \mathbf{a}, b - 1]$ avec $\mathbf{u} \nearrow \mathbf{a}$. Mais alors $|\nu| = |\lambda| - 2$ qui est exclu. On peut donc supposer $b(\mu) = b(\lambda) = b(\nu)$. Alors $\lambda = [\mathbf{a}, \mathbf{c}, b]$, $\mu = [\mathbf{u}, \mathbf{u}, b]$, $\nu = [\mathbf{v}, \mathbf{v}, b]$. Comme $\mu \nearrow \lambda$, on peut supposer $\mathbf{u} \nearrow \mathbf{a}$, $\mathbf{u} = \mathbf{c}$. Si $\mathbf{v} \nearrow \mathbf{a}$ et $\mathbf{v} = \mathbf{c}$ on aurait $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ et $\mu = \nu$ ce qui est exclu. Comme $\nu \nearrow \lambda$ on a donc $\mathbf{v} \nearrow \mathbf{c}$ et $\mathbf{v} = \mathbf{a}$. Mais alors $|\mathbf{c}| = |\mathbf{v}| + 1 = |\mathbf{a}| + 1$ et $|\mathbf{a}| = |\mathbf{u}| + 1 = |\mathbf{c}| + 1$, une contradiction. $\square$

4 Préliminaires sur les représentations de $\mathfrak{S}_n$

Soit $\mathbb{k}$ un corps de caractéristique 0. A toute partition λ de l'entier $n \geq 1$ est associée classiquement une représentation irréductible sur $\mathbb{k}$ du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$. Une description matricielle de ces représentations est donnée par la combinatoire des *tableaux de Young standards*, que nous rappelons ici. Pour les résultats classiques utilisés sans référence dans cette section, on pourra consulter [FH91], ch. 4.

4.1 Modèles matriciels

Un tableau de Young de forme λ est un remplissage des cases du diagramme de Young associé à λ par les n nombres de 1 à n (qui apparaissent donc chacun une seule fois). Il est dit *standard* si la répartition de ces nombres est croissante suivant les lignes et les colonnes.

On remarque que si T est un tableau (standard) de forme λ , il définit de façon naturelle un tableau de Young (standard), noté T' , de forme λ' . Suivant notre convention, les tableaux standards associés à la partition $[2, 1]$ sont les suivants

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}$$

et le 2 du premier diagramme se trouve en première colonne et deuxième ligne.

Soit T un tableau de Young de forme λ . Pour tout $1 \leq r \leq n$, on note $c_r(T)$ (resp. $l_r(T)$) la colonne (resp. la ligne) de T où se trouve r . Pour tous $1 \leq i < j \leq n$ on définit la *distance axiale*

$$d_T(i, j) = c_i(T) - c_j(T) + l_j() - l_i(T)$$

et on remarque que $d_T(j, i) = -d_T(i, j)$. De plus, lorsque T est standard, si $i < j$ et $c_i(T) > c_j(T)$, on a nécessairement $l_i(T) < l_j(T)$ donc $d_T(i, j) > 0$.

La représentation associée à λ est définie sur l'espace vectoriel abstrait de base l'ensemble des tableaux standards de forme λ par l'action des transpositions consécutives $s_r = (r \ r+1)$. Pour ce faire, on a besoin de la notation suivante.

Soit T un tableau de Young standard de forme λ et T_r le tableau déduit de T en intervertissant r et $r+1$. Supposons que r et $r+1$ ne sont ni dans la même ligne ni dans la même colonne. Alors T_r est également un tableau standard, et $(T_r)' = (T')_r$. Si $c_r(T) < c_{r+1}(T)$, c'est-à-dire que $d_T(r+1, r) > 0$, on note $T < T_r$, et $T > T_r$ dans le cas contraire.

Alors, l'action de $\mathfrak{S}_n$ dans cette base des tableaux standards est définie par $s_r.T = T$ si r et $r+1$ sont sur la même colonne de T , par $s_r.T = -T$ si r et $r+1$ sont sur la même ligne de T . Dans les autres cas, quitte à intervertir T et T_r on peut supposer $T < T_r$; alors le plan engendré par T et T_r est stable par l'action de s_r , qui est donnée dans la base (T, T_r) par la matrice

$$\frac{1}{d} \begin{pmatrix} -1 & d+1 \\ d-1 & 1 \end{pmatrix}$$

où $d = d_T(r+1, r) > 0$.

A partir de maintenant, on fera l'abus de notation commode qui consiste à identifier la partition ou le diagramme de Young λ avec la représentation associée, quand il n'y a pas de risque de confusion. L'essentiel de la théorie des représentations en caractéristique 0 du groupe symétrique est résumé dans la proposition suivante :

Proposition 3. *Soit $n \geq 1$. Pour toute partition λ de n , la représentation de $\mathfrak{S}_n$ qui lui est associée est absolument irréductible, et toute représentation irréductible de $\mathfrak{S}_n$ est isomorphe à une et à une seule d'entre elles.*

En particulier, toutes les représentations irréductibles étant réalisables sur $\mathbb{Q}$ donc sur $\mathbb{R}$, elles sont toutes autoduales.

Les propriétés importantes qui suivent nous seront utiles ici :

Modèle orthogonal. A tout tableau de Young standard T on associe l'élément suivant

$$\zeta(T) = \prod_{\substack{i < j \\ c_i(T) > c_j(T)}} \frac{d_T(i, j) - 1}{d_T(i, j) + 1}$$

Supposons désormais $\mathbb{k} = \mathbb{R}$. Alors $\sqrt{\zeta(T)}$ est bien défini parce que, sous ces hypothèses, $d_T(i, j) > 0$. A tout tableau de Young standard de forme λ on associe alors $\tilde{T} = \sqrt{\zeta(T)}T$. L'action de s_r pour $1 \leq r \leq n-1$ dans la base formée des $\tilde{T}$ pour T standard est alors donnée par $s_r.\tilde{T} = \tilde{T}$ si r et $r+1$ sont sur la même colonne de T , par $s_r.\tilde{T} = -\tilde{T}$ si r et $r+1$ sont sur la même ligne de T ; dans les autres cas, si $T < T_r$ on a $d = d_T(r+1, r) > 0$ et on vérifie facilement que $\zeta(T_r) = \zeta(T)\frac{d-1}{d+1}$. L'action de s_r est alors donnée dans la base $(\tilde{T}, \tilde{T}_r)$ du plan que ces éléments engendrent par la matrice

$$\frac{1}{d} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{d^2-1} \\ \sqrt{d^2-1} & 1 \end{pmatrix}$$

Règle de Young. Pour tout $n \geq 2$, on identifie $\mathfrak{S}_{n-1}$ au sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ composé des permutations qui fixent n . La restriction d'une représentation irréductible λ de $\mathfrak{S}_n$ au sous-groupe $\mathfrak{S}_{n-1}$ donnée par la règle suivante, dite règle de Young :

$$\text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}} \lambda = \bigoplus_{\mu \nearrow \lambda} \mu = \bigoplus_{\mu \in P(\lambda)} \mu.$$

En particulier, cette restriction est sans multiplicités et est composée de $\delta(\lambda)$ composantes irréductibles.

Représentations de dimension 1. Les représentations de dimension 1 sont la représentation triviale et la représentation donnée par la signature, qui correspondent respectivement aux partitions $[n]$ et $[1^n]$. On notera également ϵ la représentation signature. Une propriété classique importante pour nous est $\lambda' \simeq \lambda \otimes \epsilon$.

Représentation de réflexion. La partition $\alpha = [n-1, 1]$ correspond à une représentation remarquable de $\mathfrak{S}_n$, appelée représentation de réflexion. Il est classique que ses puissances alternées sont également irréductibles, et correspondent aux représentations irréductibles dont les diagrammes de Young sont « en équerres » :

$$\Lambda^p \alpha \simeq [n-p, 1^p]$$

pour $1 \leq p \leq n-1$.

4.2 Décalages et formes bilinéaires

Par des moyens combinatoires, on définit dans cette section quand $\lambda = \lambda'$ une forme bilinéaire sur l'espace vectoriel sous-jacent.

A tout tableau standard T associé à une partition λ de n , on associe la quantité suivante

$$w(T) = \prod_{\substack{i < j \\ c_i(T) > c_j(T)}} (-1) = (-1)^{\#\{i < j \mid c_i(T) > c_j(T)\}}$$

Remarquons que si, pour $1 \leq r \leq n-1$, les nombres r et $r+1$ ne se trouvent ni sur la même ligne ni sur la même colonne de T , alors $w(T_r) = -w(T)$. De plus,

$$w(T') = \prod_{\substack{i < j \\ c_i(T') > c_j(T')}} (-1) = \prod_{\substack{i < j \\ l_i(T) > l_j(T)}} (-1) = (-1)^{\#\{i < j \mid l_i(T) > l_j(T)\}}$$

Repérons les cases d'un diagramme de Young associé à une partition λ par les coordonnées (i, j) , avec $1 \leq i \leq \lambda'_1$, et $1 \leq j \leq \lambda_i$. Il y a donc $|\lambda| = n$ cases. On appelle *décalage* un couple (c_1, c_2) de cases $c_1 = (i_1, j_1)$ et $c_2 = (i_2, j_2)$ de λ , avec $i_1 < i_2$ et $j_1 > j_2$. Le nombre de tels décalages est donc une fonction de λ , notée $\nu(\lambda)$. À un tel décalage on associe également le nombre positif $(d+1)/(d-1)$, avec $d = |i_1 - i_2 + j_2 - j_1|$, et à λ le produit $\xi(\lambda)$ de tous ces nombres.

Cela nous permet de démontrer le

Lemme 5. *Si λ est un diagramme de Young symétrique, pour tout tableau de Young standard T on a $w(T)w(T') = \nu(\lambda)$ et $\zeta(T)\zeta(T') = \xi(\lambda)$.*

Démonstration. Le produit $w(T)w(T')$ est encore égal au produit de (-1) sur tous les couples $i < j$ tels que $c_i(T) > c_j(T)$ ou bien, exclusivement, $l_i(T) > l_j(T)$. De tels couples sont en bijection avec les décalages du diagramme λ , de la façon suivante : au couple (x, y) de cases constituant le décalage on associe le couple (i, j) où i (resp. j) est le minimum (resp. le maximum) de leurs contenus dans T ; inversement, la condition sur i et j signifie que les deux cases qui les contiennent forment un décalage. Le deuxième énoncé se démontre de façon similaire. $\square$

On définit une forme bilinéaire non dégénérée $(\mid)$ sur λ par

$$(S|T) = w(T)\delta_{S,T'}$$

pour S et T deux tableaux standards de forme λ , où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker. Si S et T sont deux tableaux standards,

$$(S|T) = w(T)\delta_{S,T'} = w(S')\delta_{S',T} = \nu(\lambda)w(S)\delta_{S',T} = \nu(\lambda)(T|S)$$

donc $(\mid)$ est symétrique si $\nu(\lambda) = 1$, et antisymétrique si $\nu(\lambda) = -1$.

La forme bilinéaire $(\mid)$ est donc soit symétrique, soit antisymétrique, en fonction de λ . Plus précisément, quand elle est symétrique, le changement de base $U = \frac{T}{2} + T'$, $V = \frac{T}{2} - T'$ sur chacun des plans engendrés par des couples (T, T') de tableaux standards symétriques l'un de l'autre montre que $(\mid)$ est équivalente sur $\mathbb{Q}$ à la forme bilinéaire symétrique standard de signature $(\frac{N}{2}, \frac{N}{2})$.

Le lemme suivant simplifie le calcul de $\nu(\lambda)$. On rappelle que $b(\lambda)$ désigne la longueur de la diagonale de λ .

Lemme 6. *Si $\lambda \vdash n$ est tel que $\lambda = \lambda'$, le nombre de décalages de λ est congru à $\frac{n-b(\lambda)}{2}$ modulo 2.*

Démonstration. On appelle diagonale de λ l'ensemble des cases de la forme (i, i) . Il y a $b(\lambda)$ telles cases.

Une case (i, j) est dite au dessus (resp. au dessous) de la diagonale si $i < j$ (resp. $i > j$). On note λ^+ et λ^- les ensembles de cases correspondants. Ici, $\lambda = \lambda'$ donc les ensembles λ^+ et λ^- sont en bijection par $\tau : (i, j) \mapsto (j, i)$.

D'autre part, à tout décalage $c = (c_1, c_2)$ on peut associer le décalage symétrique $\tau(c) = (\tau(c_2), \tau(c_1))$. On en déduit que le nombre de décalages est congru modulo 2 au nombre de décalages fixés par τ . Or, si $c = (c_1, c_2)$ et $\tau(c) = c$, on a $c_2 = \tau(c_1)$ et $c_1 = \tau(c_2)$. Il y a autant de tels décalages que d'éléments de λ^+ , soit $(n - b(\lambda))/2$. $\square$

Cette forme bilinéaire est reliée à l'isomorphisme entre λ et $\lambda \otimes \epsilon$. Plus précisément, introduisons sur λ le produit scalaire $\langle S, T \rangle = \frac{1}{\zeta(T)} \delta_{S,T}$, et notons M l'endomorphisme de $\mathbb{k}$ -espace vectoriel M sur λ par $M(T) = w(T)\zeta(T')T'$, pour tout tableau standard T de forme λ . Il n'est pas difficile de vérifier que $\langle S|T \rangle = \langle S, M(T) \rangle$. Le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a la propriété que, si $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, alors $\langle \tilde{S}, \tilde{T} \rangle = \delta_{S,T}$.

Lemme 7. *Pour tout $s \in \mathfrak{S}_n$ et tous x, y dans λ , on a $M(s.x) = \epsilon(s)s.M(x)$, et $(s.x|y) = \epsilon(s)(x|s^{-1}.y)$.*

Démonstration. Comme ces propriétés sont linéaires en x et y , on peut supposer, d'une part $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, d'autre part que $x = \tilde{S}$ et $y = \tilde{T}$ où S et T sont des tableaux standards. D'autre part, comme les transpositions consécutives engendrent $\mathfrak{S}_n$, on peut supposer $s = s_r$, pour $1 \leq r < n$. D'après les matrices du modèle orthogonal, l'action de s_r est autoadjointe pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$, donc orthogonale puisque $s_r^2 = 1$. Il s'ensuit que la deuxième égalité découle de la première. D'autre part, on a $M(\tilde{T}) = w(T)T'$. On en déduit facilement que $M(s_r.\tilde{T}) = -s_r.M(\tilde{T})$: par exemple, si T_r est un tableau standard et $d = d_T(r+1, r) > 0$, alors d'une part

$$M(s_r.\tilde{T}) = \frac{-1}{d}w(T)\tilde{T}' + \frac{\sqrt{d^2-1}}{d}w(T_r)\tilde{T}'_r = \frac{-1}{d}w(T)\tilde{T}' - \frac{\sqrt{d^2-1}}{d}w(T)\tilde{T}'_r$$

parce que $w(T_r) = -w(T)$ et, d'autre part, puisqu'alors $T' > T'_r$, on a

$$s_r.M(\tilde{T}) = w(T)\sqrt{d^2-1}d\tilde{T}'_r + w(T)\frac{1}{d}\tilde{T}' = -M(s_r.\tilde{T})$$

□

4.3 Dimensions

Soit λ une partition de n , et $r \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda_r > 0$ et $\lambda_{r+1} = 0$. La dimension du $\mathbb{k}$ -espace vectoriel associé à λ , c'est-à-dire le nombre de tableaux standards de forme λ , est donné par la formule suivante (cf. [FH91] p. 50)

$$\dim(\lambda) = \frac{n!}{l_1! \dots l_r!} \prod_{i < j} (l_i - l_j)$$

où $l_i = \lambda_i + r - i$. Cette formule permet de calculer facilement la dimension d'une représentation donnée. Le cas des équerres se déduit immédiatement de l'isomorphisme avec les puissances alternées de la représentation de réflexion :

$$\dim[n-p, 1^p] = \binom{n-1}{p}$$

pour $0 \leq p \leq n-1$. Pour une approche inductive, il est souvent plus utile d'utiliser la règle de Young, qui a pour conséquence la formule itérative suivante :

$$\dim([1]) = 1 \quad \dim(\lambda) = \sum_{\mu \nearrow \lambda} \dim(\mu) = \sum_{\mu \in P(\lambda)} \dim(\mu)$$

On sait qu'il n'y a que deux représentations de dimension 1. On remarque ainsi

$$\dim(\lambda) = 1 \Leftrightarrow \lambda \in \{[n], [1^n]\} \Leftrightarrow \delta(\lambda) = 1$$

Après celles-ci, les représentations irréductibles les plus petites sont de dimension $n-1$:

Lemme 8. Soit $n \geq 5$ et λ une partition de n . Alors

1. $\dim(\lambda) > 1 \Rightarrow \dim(\lambda) \geq \dim(\alpha) = n - 1$
2. $\dim(\lambda) = n - 1 \Leftrightarrow \lambda \in \{\alpha, \alpha'\}$

En particulier, si λ est propre, $\dim(\lambda) > n - 1$.

Démonstration. On sait que $\dim(\alpha) = \dim(\alpha') = n - 1$. On procède par récurrence sur n . Le cas $n = 5$ se vérifie facilement par calcul des dimensions de chacune des représentations. Si $n > 5$, soit $\lambda \vdash n$ avec $\dim(\lambda) > 1$. On a donc $\delta(\lambda) > 1$, donc $P(\lambda)$ contient au moins deux éléments.

S'il existe $\mu_1 \nearrow \lambda$ tel que $\dim(\mu) > 1$, alors par hypothèse de récurrence on a $\dim(\mu) \geq n - 2$. Notant alors $\mu_2 \neq \mu_1$ tel que $\mu_2 \nearrow \lambda$ on a alors $\dim(\lambda) \geq \dim(\mu_1) + 1 = n - 1$. De plus, le cas d'égalité signifie que $\mu_1 \in \{[n - 2, 1], [2, 1^{n-3}]\}$ et $P(\lambda) = \{\mu_1, \mu_2\}$ avec $\dim(\mu_2) = 1$, soit $\mu_2 \in \{[n - 1], [1^{n-1}]\}$. On déduit alors facilement du fait que $\lambda = \mu_1 \cup \mu_2$ qu'alors $\lambda \in \{\alpha, \alpha'\}$.

Au contraire, si tous les $\mu \in P(\lambda)$ sont de dimension 1, comme il y en a au moins deux on a $P(\lambda) = \{[n - 1], [1^{n-1}]\}$ et $\lambda = [n] \cup [1^n] = [n - 1, 1^{n-2}]$, qui est une partition de $2n - 3 > n$ pour $n \geq 4$. Ce cas est donc exclu et la proposition démontrée. $\square$

Une inégalité qui nous sera utile est la suivante :

Lemme 9. Si $|\lambda| \geq 6$ et $\dim \lambda \neq 1$, alors $\dim \lambda > 2\delta(\lambda)$.

Démonstration. D'après la règle de Young, la dimension de λ est la somme des dimensions des $\mu \in P(\lambda)$, qui sont au nombre de $\delta(\lambda)$. Pour un tel μ , et d'après le lemme 8, si $\dim(\mu) \neq 1$ alors $\dim(\mu) \geq 4 > 2$ puisque $|\mu| \geq 5$. Ainsi, on a bien $\dim(\lambda) > 2\delta(\lambda)$ si $\dim(\mu) \neq 1$ pour tout $\mu \in P(\lambda)$. Dans le cas contraire, quitte à échanger λ en λ' on peut supposer $[n - 1] \in P(\lambda)$. Or les seules $\lambda \vdash n$ telles que $[n - 1] \nearrow \lambda$ sont $[n]$, qui est de dimension 1, et α . On en déduit d'une part que $\dim(\lambda) = \dim(\alpha) = n - 1$ et d'autre part que $\delta(\lambda) = 2$, et on a bien $n - 1 > 2 \times 2 = 4$ puisque $n > 5$. $\square$

4.4 Action de la somme des transpositions

Une autre donnée naturellement associée à une partition λ est la valeur $\gamma(\lambda)$ du caractère irréductible associé sur l'une des transpositions. Pour la calculer, on a une formule due à Frobenius

$$\gamma(\lambda) = \frac{\dim(\lambda)}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{b(\lambda)} (v_i(v_i + 1) - u_i(u_i + 1)) = \frac{\dim(\lambda)}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{b(\lambda)} (v_i - u_i)(v_i + u_i + 1)$$

avec $\lambda_i = i + u_i$ et $\lambda'_i = i + v_i$ pour $1 \leq i \leq b(\lambda)$ (cf. [FH91] p. 52, ex. 4.17). En particulier, $\gamma(\lambda) = 0$ si $\lambda = \lambda'$.

Il nous sera utile de connaître l'action sur chacune des représentations de l'élément

$$T_n = \sum_{i < j} (i \ j) \in \mathbb{k}\mathfrak{S}_n$$

qui est central dans l'algèbre de groupe de $\mathfrak{S}_n$. Comme chaque λ est une représentation absolument irréductible de $\mathfrak{S}_n$, l'élément T_n agit sur elle par un scalaire. Il suffit donc de connaître la trace de cette action, c'est-à-dire $n(n-1)/2$ fois la valeur du caractère associé sur une transposition, pour connaître la valeur de T_n . En particulier,

Lemme 10. L'élément $T_n \in \mathbb{k}\mathfrak{S}_n$ agit sur $\lambda \vdash n$ par le scalaire $n(n-1)\gamma(\lambda)/2\dim(\lambda)$.

5 Factorisations

Dans cette section, nous associons en 5.2 à chaque partition symétrique λ une algèbre de Lie $\mathfrak{osp}(\lambda)$, et construisons les morphismes injectifs

$$\phi_n : \mathfrak{g}'_n \hookrightarrow \mathfrak{sl}_{n-1}(\mathbb{k}) \times \left(\prod_{\lambda \in E_n / \sim} \mathfrak{sl}(\lambda) \right) \times \left(\prod_{\lambda \in F_n} \mathfrak{osp}(\lambda) \right)$$

mentionnés dans l'énoncé du théorème A. Par construction $\mathfrak{g}'_n$ est une sous-algèbre de Lie semi-simple de $\mathbb{k}\mathfrak{S}_n$. Or, en tant qu'algèbre de Lie,

$$\mathbb{k}\mathfrak{S}_n = \bigoplus_{\lambda \vdash n} \mathfrak{gl}(\lambda)$$

et chaque λ correspond à une représentation de $\mathfrak{g}_n$ donc de $\mathfrak{g}'_n$, qui est encore irréductible parce que les transpositions engendrent $\mathfrak{S}_n$: il s'ensuit que tout sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel associé à λ qui est stable par $\mathfrak{g}'_n$ sera stable par $\mathfrak{S}_n$. Le morphisme ϕ_n correspondra à une factorisation de cette inclusion. Du simple fait que $\mathfrak{g}'_n$ est semi-simple, on en déduit tout d'abord qu'elle est incluse dans la sous-algèbre de Lie dérivée de $\mathbb{k}\mathfrak{S}_n$, soit la factorisation

$$\begin{array}{ccc} & \bigoplus_{\lambda \vdash n} \mathfrak{gl}(\lambda) & \\ & \uparrow & \\ \mathfrak{g}'_n & \xrightarrow{\quad} & \bigoplus_{\substack{\lambda \vdash n \\ \dim(\lambda) > 1}} \mathfrak{sl}(\lambda) \end{array}$$

5.1 Les algèbres de Lie $\mathfrak{sl}(\lambda)$ et $\mathfrak{sl}(\lambda')$

Soit $\lambda \vdash n$ une partition non symétrique de n . On note ici, pour clarifier l'exposé, V_λ le $\mathbb{k}$ -espace vectoriel de base les tableaux standards de forme λ , c'est-à-dire le $\mathbb{k}$ -espace vectoriel associé à la représentation $\rho_\lambda : \mathbb{k}\mathfrak{S}_n \rightarrow \text{End}(V_\lambda)$. On sait qu'existe un isomorphisme de $\mathbb{k}\mathfrak{S}_n$ -modules $P_\lambda : \lambda' \rightarrow \lambda \otimes \epsilon$, c'est-à-dire un isomorphisme de $\mathbb{k}$ -espaces vectoriels entre $V_{\lambda'}$ et V_λ tel que $P_\lambda(s.x) = \epsilon(s)s.P_\lambda(x)$ pour tout $s \in \mathfrak{S}_n$ et $x \in V_{\lambda'}$.

En tant que représentations de $\mathfrak{g}_n$, on en déduit que, pour toute transposition s de $\mathfrak{S}_n$, donc pour tout $s \in \mathfrak{g}_n$, le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} V_{\lambda'} & \xrightarrow{P_\lambda} & V_\lambda \\ \rho_{\lambda'}(s) \downarrow & & \downarrow -\rho_\lambda(s)^\# \\ V_{\lambda'} & \xrightarrow{P_\lambda} & V_\lambda \end{array}$$

où l'on a noté $u^\#$ l'adjoint de $u \in \mathfrak{gl}(\lambda)$ pour un produit scalaire $\mathfrak{S}_n$ -invariant sur λ . Cela signifie que ρ_λ et $\rho_{\lambda'}$ sont duales l'une de l'autre en tant que représentations de $\mathfrak{g}_n$ donc de $\mathfrak{g}'_n$. En particulier $\mathfrak{g}_\lambda \simeq \mathfrak{g}_{\lambda'}$ et de plus le morphisme d'algèbres de Lie $\mathfrak{g}'_n \rightarrow \mathfrak{sl}(\lambda) \oplus \mathfrak{sl}(\lambda')$ se factorise ainsi

$$\begin{array}{ccc}
& \mathfrak{sl}(\lambda) \oplus \mathfrak{sl}(\lambda') \\
& \nearrow \\
\mathfrak{g}'_n & \longrightarrow \mathfrak{sl}(\lambda) \xrightarrow{\text{Id} \oplus \widetilde{P}_\lambda}
\end{array}$$

où l'on a noté $\widetilde{P}_\lambda$ l'automorphisme de $\mathfrak{gl}(\lambda)$ défini par $\widetilde{P}_\lambda(x) = -P_\lambda^{-1}x^\#P_\lambda$. Il envoie naturellement $\mathfrak{sl}(\lambda)$ sur $\mathfrak{sl}(\lambda')$. On en déduit la factorisation suivante

$$\begin{array}{ccc}
& \bigoplus_{\substack{\lambda \vdash n \\ \dim(\lambda) > 1}} \mathfrak{sl}(\lambda) \\
& \nearrow \\
\mathfrak{g}'_n & \longrightarrow \left(\bigoplus_{\substack{\dim(\lambda) > 1 \\ \lambda < \lambda'}} \mathfrak{sl}(\lambda) \right) \oplus \left(\bigoplus_{\substack{\dim(\lambda) > 1 \\ \lambda = \lambda'}} \mathfrak{sl}(\lambda) \right)
\end{array}$$

5.2 L'algèbre de Lie $\mathfrak{osp}(\lambda)$

Soit λ une partition symétrique de n . On a construit en 4.2 une forme bilinéaire $(\mid)$ non dégénérée, orthogonale ou symplectique suivant λ , sur l'espace vectoriel sous-jacent. Elle nous permet de définir l'algèbre de Lie suivante.

Définition 2. On note $\mathfrak{osp}(\lambda)$ la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(\lambda)$ composée des $m \in \mathfrak{gl}(\lambda)$ tels que $(m.x|y) + (x|m.y) = 0$ pour tous x, y .

D'après la section 4.2 cette algèbre de Lie simple, orthogonale ou symplectique, est dans tous les cas de rang semi-simple $\dim(\lambda)/2$. L'intérêt pour nous de cette algèbre de Lie vient du fait suivant.

Lemme 11. Pour tout $\lambda \vdash n$ symétrique, $\mathfrak{g}_\lambda \subset \mathfrak{osp}(\lambda)$.

Démonstration. Comme $\mathfrak{g}_n$ est engendrée par les transpositions, il suffit de montrer que l'image de chacune d'entre elles appartient à $\mathfrak{osp}(\lambda)$, c'est-à-dire que $(s.x|y) = -(x|s.y)$ pour tous x, y dans λ . C'est une conséquence immédiate du lemme 7 puisque, lorsque s est une réflexion, $s^{-1} = s$ et $\epsilon(s) = -1$. $\square$

On en déduit la factorisation

$$\begin{array}{ccc}
& \left(\bigoplus_{\substack{\dim(\lambda) > 1 \\ \lambda < \lambda'}} \mathfrak{sl}(\lambda) \right) \oplus \left(\bigoplus_{\substack{\dim(\lambda) > 1 \\ \lambda = \lambda'}} \mathfrak{sl}(\lambda) \right) \\
& \nearrow \\
\mathfrak{g}'_n & \longrightarrow \left(\bigoplus_{\substack{\dim(\lambda) > 1 \\ \lambda < \lambda'}} \mathfrak{sl}(\lambda) \right) \oplus \left(\bigoplus_{\substack{\dim(\lambda) > 1 \\ \lambda = \lambda'}} \mathfrak{osp}(\lambda) \right)
\end{array}$$

5.3 Equerres

On note $\alpha_r = [n - r, 1^r]$ pour tout $1 \leq r \leq n - 1$, ainsi $\alpha = \alpha_1 = [n - 1, 1]$. On a rappelé en section 4.1 que, en tant que représentations de $\mathfrak{S}_n$, $\Lambda^r \alpha = \alpha_r$, où $\Lambda^r V$ désigne la puissance extérieure r -ième de V . Un phénomène remarquable est que les représentations de $\mathfrak{g}'_n$ correspondantes sont également isomorphes. Ce résultat découle immédiatement de la classification des systèmes KZ irréductibles sous l'action du groupe symétrique (cf. [Ma01a, Ma01b]). Nous en donnons ici une démonstration élémentaire :

Lemme 12. *En tant que représentation de $\mathfrak{g}'_n$, $\alpha_r = \Lambda^r \alpha$.*

Démonstration. Soit β la représentation naturelle de $\mathfrak{S}_n$, définie sur une base $v_1, \dots, v_n$ par $s.v_i = v_{s(i)}$ pour tout $s \in \mathfrak{S}_n$. On a $\beta = [n] \oplus \alpha$ en tant que représentation de $\mathfrak{S}_n$ et de $\mathfrak{g}_n$. Alors $\Lambda^r \beta = \Lambda^r \alpha \oplus \Lambda^{r-1} \alpha$. Comme $\Lambda^{n-1} \beta = \Lambda^{n-1} \alpha \oplus \Lambda^{n-2} \alpha$, il suffit de montrer que l'action de $\mathfrak{g}'_n$ sur $\Lambda^r \beta$ est déduite de celle de $\mathfrak{S}_n$ par la composée $\mathfrak{g}'_n \rightarrow \mathfrak{g}_n \rightarrow \mathbb{k}\mathfrak{S}_n$ pour en déduire $\alpha_r = \Lambda^r \alpha$ en tant que représentation de $\mathfrak{g}'_n$. Fixons $r \in [1, n]$, et notons $\underline{v} = v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_r}$ pour $i_1 < i_2 < \dots < i_r$, ainsi que $\tau_{ij} = (i \ j) \in \mathfrak{g}_n$ et $\sigma_{ij} = (i \ j) \in \mathfrak{S}_n$.

- Si $i_1 \geq 3$, on a $\tau_{12}.\underline{v} = r\underline{v}$ et $\sigma_{12}.\underline{v} = \underline{v}$.
- Si $i_1 = 1$ et $i_2 \geq 3$, ou $i_1 = 2$ et $i_2 \geq 3$, on a $\tau_{12}.\underline{v} = \sigma_{12}.\underline{v} + (r - 1)\underline{v}$.
- Si $i_1 = 1$ et $i_2 = 2$, on a $\tau_{12}.\underline{v} = (r - 2)\underline{v}$ et $\sigma_{12}.\underline{v} = -\underline{v}$

et dans tous les cas on a donc $\tau_{12}.\underline{v} = \sigma_{12}.\underline{v} + (r - 1)\underline{v}$. On en déduit que l'action de τ_{12} est celle de $\sigma_{12} + (r - 1)\text{Id}$. Comme l'action de $\mathfrak{g}_n$ est $\mathfrak{S}_n$ -équivariante pour l'action par conjugaison de $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathfrak{g}_n \subset \mathbb{k}\mathfrak{S}_n$, l'action de τ_{ij} est celle de $\sigma_{ij} + (r - 1)\text{Id}$, et l'action de $\mathfrak{g}'_n$ sur $\Lambda^r \beta$ est bien déduite de l'action de $\mathfrak{S}_n$ par $\mathfrak{g}'_n \subset \mathbb{k}\mathfrak{S}_n$, d'où $\alpha_r = \Lambda^r \alpha$ en tant que représentation de $\mathfrak{g}'_n$. $\square$

On en déduit que les morphismes $\mathfrak{g}'_n \rightarrow \mathfrak{sl}(\alpha_r)$ se factorisent en

$$\begin{array}{ccc} & & \mathfrak{sl}(\alpha_r) \\ & \nearrow \rho_{\alpha_r} & \uparrow \Delta_r \\ \mathfrak{g}'_n & \xrightarrow{\rho_\alpha} & \mathfrak{sl}(\alpha) \end{array}$$

où Δ_r est donné par

$$\Delta_r(x) = \sum_{i=1}^r 1 \wedge \dots \wedge x^{(i)} \wedge \dots \wedge 1$$

On en déduit la factorisation finale

$$\begin{array}{ccc} & \left(\bigoplus_{\substack{\dim(\lambda) > 1 \\ \lambda < \lambda'}} \mathfrak{sl}(\lambda) \right) \oplus \left(\bigoplus_{\substack{\dim(\lambda) > 1 \\ \lambda = \lambda'}} \mathfrak{osp}(\lambda) \right) & \\ & \uparrow & \\ \mathfrak{g}'_n & \longrightarrow \mathfrak{sl}_{n-1}(\mathbb{k}) \times \left(\prod_{\lambda \in E_n / \sim} \mathfrak{sl}(\lambda) \right) \times \left(\prod_{\lambda \in F_n} \mathfrak{osp}(\lambda) \right) \end{array}$$

6 Démonstration du théorème A

6.1 Réduction à $\mathbb{k} = \mathbb{C}$

Si $\mathbb{k}$ est un corps de caractéristique 0, notons $\mathfrak{g}_n(\mathbb{k}) \subset \mathbb{k}\mathfrak{S}_n$ l'algèbre de Lie des transpositions définie sur $\mathbb{k}$, et

$$\mathcal{L}_n(\mathbb{k}) = \mathfrak{sl}_{n-1}(\mathbb{k}) \times \left(\prod_{\lambda \in E_n / \sim} \mathfrak{sl}(\lambda) \right) \times \left(\prod_{\lambda \in F_n} \mathfrak{osp}(\lambda) \right) \subset \mathbb{k}\mathfrak{S}_n$$

l'algèbre de Lie de dimension finie construite en section 5.3. On a construit, pour tout corps $\mathbb{k}$ de caractéristique 0, un morphisme injectif $\phi_n^{\mathbb{k}} : \mathfrak{g}_n(\mathbb{k}) \rightarrow \mathcal{L}_n(\mathbb{k})$. Par construction, la dimension de $\mathcal{L}_n(\mathbb{k})$ sur $\mathbb{k}$ est indépendante de $\mathbb{k}$, et celle de $\mathfrak{g}_n(\mathbb{k})$ également parce que $\mathfrak{g}_n(\mathbb{k}) = \mathfrak{g}_n(\mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{k}$. Il suffit donc de montrer l'égalité des dimensions pour $\mathbb{k} = \mathbb{C}$, c'est-à-dire de montrer que $\phi_n^{\mathbb{C}}$ est surjectif, pour conclure la preuve du théorème.

A partir de maintenant, on supposera donc $\mathbb{k} = \mathbb{C}$. Toutes les algèbres de Lie considérées sont donc semi-simples complexes, donc déterminées à isomorphisme près par leur type dans la classification de Cartan. On note à nouveau $\mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}_n(\mathbb{C})$, et on notera $\mathcal{L}_n = \mathcal{L}_n(\mathbb{C})$.

6.2 Généralités sur les algèbres de Lie semi-simples

Nous utiliserons la rigidité dimensionnelle de la classification des algèbres de Lie simples complexes, notamment les deux lemmes suivants, qui se déduisent facilement de cette classification et de la formule des caractères de Weyl par examen des cas (cf. par exemple les calculs de [FH91], ex. 24.52). On utilise, pour chaque algèbre de Lie simple de rang n , la numérotation des poids fondamentaux $\varpi_1, \dots, \varpi_n$ de [FH91], et on accepte les redondances dans la classification des algèbres de Lie simples ($A_3 = D_3$, $B_2 = C_2$, etc.). Pour toute algèbre semi-simple complexe $\mathfrak{g}$, on notera $\text{rg}(\mathfrak{g})$ son rang.

Lemme 13. *Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie simple complexe qui admet une représentation V telle que $\dim(V) < 2\text{rg}(\mathfrak{g})$, alors $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{sl}(V)$.*

Lemme 14. *Les paires $(\mathfrak{g}, V)$ avec $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple complexe de rang n et V une représentation irréductible de $\mathfrak{g}$ de dimension N telles que $2n \leq N < 4n$ sont, pour tout $n \geq 2$, (B_n, ϖ_1) pour $N = 2n + 1$, (C_n, ϖ_1) pour $N = 2n$, et (D_n, ϖ_1) pour tout $n \geq 3$ ($N = 2n$) plus, pour $n \leq 6$, les couples exceptionnels suivants :*

Rang 1 : (A_1, ϖ_1) pour $N = 2$, $(A_1, 2\varpi_1)$ pour $N = 3$.

Rang 2 : (G_2, ϖ_1) pour $N = 7$, (B_2, ϖ_2) pour $N = 4$, (C_2, ϖ_1) pour $N = 5$.

Rang 3 : (B_3, ϖ_3) pour $N = 8$, (A_3, ϖ_2) pour $N = 6$.

Rang 4 : (D_4, ϖ_3) et (D_4, ϖ_4) pour $N = 8$, (A_4, ϖ_2) et (A_4, ϖ_3) pour $N = 10$.

Rang 5 : (A_5, ϖ_2) et (A_5, ϖ_4) pour $N = 15$, (D_5, ϖ_4) et (D_5, ϖ_5) pour $N = 16$.

Rang 6 : (A_6, ϖ_2) et (A_6, ϖ_5) pour $N = 21$.

Pour se ramener au cas des algèbres de Lie simples et utiliser les deux lemmes précédents, nous invoquerons le lemme suivant.

Lemme 15. *Soit V un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ deux sous-algèbres de Lie semi-simples de $\mathfrak{sl}(V)$. On note $\mathfrak{h} = \bigoplus_{j \in J} \mathfrak{h}_j$ la décomposition de $\mathfrak{h}$ en idéaux simples. On suppose que les propriétés suivantes sont vérifiées*

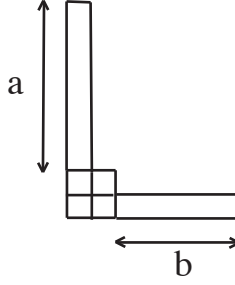


FIG. 2 – Les diagrammes $D(a, b) = [a + 2, 2, 1^b]$

1. V est irréductible sous l'action de $\mathfrak{g}$.
2. Pour tout $j \in J$, la restriction de V à $\mathfrak{h}_j$ admet une composante irréductible de multiplicité 1.
3. On a $\text{rg}(\mathfrak{g}) < 2\text{rg}(\mathfrak{h})$.

Alors $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie simple.

Démonstration. On note $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}^g$ la décomposition de $\mathfrak{g}$ en idéaux simples, et on fixe un $i \in [1, g]$. On note $p : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}^i$ la projection sur $\mathfrak{g}^i$ parallèlement à $\mathfrak{g}^{(i)} = \bigoplus_{r \neq i} \mathfrak{g}^r$. Soit $q : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{g}^i$ la restriction de p à $\mathfrak{h}$. On montre par l'absurde que q est injective.

En effet, $\text{Ker } q$ serait sinon un idéal non nul de $\mathfrak{h}$, donc une somme non vide $\bigoplus_{j \in K} \mathfrak{h}_j$ de certains de ses idéaux simples, avec $K \subset J$ et $K \neq \emptyset$. On choisit un tel $j \in K$. Comme V est irréductible et fidèle pour l'action de $\mathfrak{g}$, cette représentation est isomorphe à une représentation de la forme $U_i \otimes U_{(i)}$ avec U_i une représentation fidèle de $\mathfrak{g}^i$ et $U_{(i)}$ une représentation de $\mathfrak{g}^{(i)}$. Comme $\mathfrak{h}_j \subset \text{Ker } q$, cet idéal agit trivialement sur U_i , donc chacune des composantes irréductibles de la restriction à $\mathfrak{h}_j$ de V intervient avec multiplicité au moins $\dim U_i$. Cela contredit l'hypothèse 2) parce que $\mathfrak{g}^i$ est non commutative donc sa représentation fidèle U_i est de dimension au moins 2.

Ainsi, $\mathfrak{h}$ s'injecte dans $\mathfrak{g}^i$ pour tout $i \in [1, g]$, donc $\text{rg}(\mathfrak{g}) \geq g\text{rg}(\mathfrak{h})$. Alors $g \leq \text{rg}(\mathfrak{g})/\text{rg}(\mathfrak{h}) < 2$ donc $g = 1$ et $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie simple. $\square$

Remarque. L'hypothèse 3) du lemme précédent est notamment vérifiée lorsque $\text{rg}(\mathfrak{h}) \geq (\dim V)/2$. Elle est également vérifiée lorsque $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(V)$ ou $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sp}(V)$ et $\text{rg}(\mathfrak{h}) > (\dim V)/4$.

6.3 Diagrammes remarquables

Pour tous $a, b \geq 0$, on note $D(a, b) = [a + 2, 2, 1^b]$. Il s'agit d'une partition de $n = a + b + 4$, dont le diagramme est de la forme décrite dans la figure 2.

D'après la règle de Young, pour $\lambda \vdash n$, l'ensemble $P(\lambda)$ contient une équerre, c'est-à-dire un $\mu \vdash n - 1$ tel que $b(\mu) = 1$, si et seulement si λ est elle-même une équerre ou bien si λ est justement de cette forme. Plus précisément, si $\lambda = D(a, b)$ avec $a, b \geq 1$, on a

$$P(D(a, b)) = \{D(a - 1, b), D(a, b - 1), [a + 2, 1^{b+1}]\}$$

Remarquons également $\mathsf{D}(a, b)' = \mathsf{D}(b, a)$ et en particulier $\dim \mathsf{D}(a, b) = \dim \mathsf{D}(b, a)$. La formule des dimensions permet d'obtenir facilement

$$\dim \mathsf{D}(a, b) = \frac{b+1}{a+2} \binom{n-2}{a} n$$

où $\mathsf{D}(a, b) \vdash n$, c'est-à-dire $n = a + b + 4$. En particulier, pour tout $a \geq 1$,

$$\dim \mathsf{D}(a, a) = 2(a+1) \binom{2a+2}{a} \quad \text{et} \quad \dim \mathsf{D}(a-1, a) = \binom{2a+1}{a-1} (2a+3).$$

et enfin, pour tout $m \geq 2$,

$$\dim \mathsf{D}(m, m-2) = \frac{2(m-1)(m+1)}{m+2} \binom{2m}{m}$$

Les résultats techniques suivants nous seront utiles. Nous les regroupons sous la forme d'un lemme, dont la démonstration est élémentaire et laissée au lecteur.

Lemme 16. 1. Pour tout $m \geq 3$, on a $\dim \mathsf{D}(m, m-2) > \binom{2m+1}{m}$.
2. Pour tout $a \geq 2$, on a $\dim \mathsf{D}(a-1, a) > \frac{1}{4} \dim \mathsf{D}(a, a)$.
3. Pour tous $a > b+1 \geq 3$, on a $\dim \mathsf{D}(a, b) > 3 \binom{a+b+2}{b+1}$

6.4 Résultats précédents et hypothèse de récurrence

Les résultats suivants sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}'_n$ ont été démontré dans des travaux antérieurs

Proposition 4. ([Ma03a], théorème 3.) Pour tout $1 \leq r \leq n$, si $\lambda = [n-r, r]$, alors $\mathfrak{g}_\lambda = \mathfrak{sl}(\lambda)$.

Proposition 5. ([Ma03a], section 8.1) Pour tout $n \leq 6$, le morphisme ϕ_n est surjectif.

Nous allons démontrer le théorème A par récurrence sur n à partir de cette dernière proposition, prenant pour hypothèse de récurrence

$$(\mathsf{HR}_n) \quad \phi_n \text{ est surjectif.}$$

On peut donc supposer (HR_{n-1}) vrai pour un certain $n \geq 7$. La démonstration que dans ce cas $(\mathsf{HR}_{n-1}) \Rightarrow (\mathsf{HR}_n)$ fait l'objet des sections suivantes.

6.5 Détermination des $\mathfrak{g}_\lambda$

On suppose désormais (HR_{n-1}) , avec $n \geq 7$. On va dans un premier temps en déduire $\mathfrak{g}_\lambda$ pour $\lambda \vdash n$.

On note $\mathfrak{h}_\lambda$ l'image de $\mathfrak{g}'_{n-1} \subset \mathfrak{g}'_n$ dans $\mathfrak{g}_\lambda$. Cette image se détermine à partir du diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g}'_n & \xrightarrow{\quad} & \mathfrak{sl}(\lambda) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathfrak{g}'_{n-1} & \xrightarrow{\quad} & \bigoplus_{\mu \nearrow \lambda} \mathfrak{sl}(\mu) \\ & \searrow \phi_{n-1} & \nearrow \\ & \mathcal{L}_{n-1} & \end{array}$$

Par hypothèse de récurrence, ϕ_{n-1} est un isomorphisme, donc $\mathfrak{h}_\lambda$ est l'image de $\mathcal{L}_{n-1}$ dans les endomorphismes de sa représentation $\bigoplus_{\mu \nearrow \lambda} \mu$ et se détermine aisément en fonction de λ . D'autre part, tout facteur simple de $\mathcal{L}_{n-1}$ associé à un $\mu \vdash n-1$ est soit de rang $\dim(\mu) - 1$, soit de rang $\dim(\mu)/2$. A partir de la règle de Young et de la combinatoire des diagrammes, on en déduit les résultats suivants.

6.5.1 Les cas particuliers $\lambda = D(a, b)$

Pour $a, b \geq 0$ et $\lambda = D(a, b)$, on note $\mathfrak{d}_{a,b} = \mathfrak{h}_\lambda$ et $N_{a,b} = \dim(\lambda)$. Si l'on convient $N_{a,b} = 0$ pour $a < 0$ ou $b < 0$, la règle de Young implique

$$N_{a,b} = N_{a-1,b} + N_{a,b-1} + \binom{a+b+2}{b+1}$$

En particulier, les nombres $N_{a,b}$ varient de façon croissante en a et en b .

Lemme 17. *Soient $a, b > 0$ tels que $n = a + b + 4 \geq 7$. Alors, sous (HR_{n-1}) , on a*

1. *Si $a = b$ alors $\text{rg}(\mathfrak{d}_{a,a}) > \frac{1}{4}N_{a,a}$.*
2. *Si $a \neq b$, alors $\text{rg}(\mathfrak{d}_{a,b}) > \frac{1}{2}N_{a,b}$.*

Démonstration. Si $b = 0$, on a $a \geq 3$ puisque $n \geq 7$. D'après la proposition 4, comme $P(D(a, 0)) = \{D(a-1, 0), [a+2, 1]\}$ on a, d'une part $N_{a,a} = N_{a-1,0} + a + 2$, et d'autre part $\mathfrak{d}_{a,0} \simeq \mathfrak{sl}(D(a-1, 0)) \times \mathfrak{sl}_{a+2}(\mathbb{C})$. On en déduit $\text{rg} \mathfrak{d}_{a,0} = N_{a-1,0} + a = N_{a,0} - 2$. Alors $N_{a,0} - 2 \gg \frac{1}{2}N_{a,0}$ si et seulement si $N_{a,0} > 4$, ce qui est vrai car $N_{a,0} \geq N_{3,0} = 14$. Puisque $D(a, b)' = D(b, a)$ on peut donc supposer $a \geq b > 0$.

Supposons d'abord $a = b > 0$. Alors $P(D(a, b)) = \{D(a-1, a) + D(a, a-1) + [a+2, 1^{a+1}]\}$. D'après (HR_{n-1}) , on alors

$$\text{rg} \mathfrak{d}_{a,a} = N_{a-1,a} - 1 + n - 4 = N_{a-1,a} + 2a - 1 > N_{a-1,a} > \frac{1}{4}N_{a,a}$$

d'après la partie 2 du lemme 16, puisque $n = 2a + 4 \geq 7$ implique $a \geq 2$. Cela montre 1).

Si $a > b > 0$, pour montrer 2) il y a deux cas à considérer.

1. Si $a = b + 1$, alors $\lambda = D(a, b) = D(b+1, b)$ avec $b \geq 1$, et $P(\lambda) = \{D(b, b) + D(b+1, b-1) + [b+3, 1^{b+1}]\}$. D'après (HR_{n-1}) ,

$$\text{rg}(\mathfrak{d}_{b+1,b}) = \frac{N_{b,b}}{2} + N_{b+1,b-1} + n - 4 = \frac{N_{b+1,b}}{2} + \frac{N_{b+1,b-1}}{2} - \frac{\dim[b+3, 1^{b+1}]}{2} + n - 4$$

Posant $m = b + 1$ on déduit de la partie 1) du lemme 16 que, si $b \geq 2$, alors

$$\text{rg}(\mathfrak{d}_{b+1,b}) > \frac{N_{b+1,b}}{2} + n - 4 > \frac{N_{b+1,b}}{2}$$

puisque $\dim[b+3, 1^{b+1}] = \binom{2b+3}{b+1}$. On traite séparément le cas $b = 1$, soit $a = 2$.

Alors $N_{1,1} = 16$ et $N_{2,0} = 9$. On en déduit $\text{rg}(\mathfrak{d}_{2,1}) = \frac{N_{1,1}}{2} + (N_{2,0} - 1) + 4 = 20 > N_{2,1}/2$ car $N_{2,1} = 35$.

2. Si $a > b + 1 \geq 2$, alors d'après (HR_{n-1}) on a $\text{rg}(\mathfrak{g}_{\mathbb{D}(a-1,b)}) = N_{a-1,b} - 1$ et $\text{rg}(\mathfrak{g}_{\mathbb{D}(a,b-1)}) = N_{a,b-1} - 1$. On en déduit

$$\text{rg}\mathfrak{d}_{a,b} = N_{a,b} - \dim[a + 2, 1^{b+1}] - 2 + n - 3.$$

Si $b + 1 \geq 3$, utilisant la partie 3) du lemme 16 on obtient

$$N_{a,b} - \binom{a+b+2}{b+1} + n - 5 > N_{a,b} - \binom{a+b+2}{b+1} > \frac{2}{3}N_{a,b} > \frac{1}{2}N_{a,b}$$

On traite séparément le cas $b = 2$. Dans ce cas, on a $\text{rg}(\mathfrak{d}_{a,2}) = \text{rg}(\mathfrak{g}_{\mathbb{D}(a-1,2)}) + \text{rg}(\mathfrak{g}_{\mathbb{D}(a,1)}) + a + 1$, soit

$$\text{rg}\mathfrak{d}_{a,2} = N_{a-1,2} + N_{a,1} + (a + 2) - 3 \geq N_{a,2} - 3$$

car $\dim[a + 2, 1] = a + 2$. Or $N_{a,2} - 3 > N_{a,2}/2$ équivaut à $N_{a,2} > 6$, ce qui est vrai car $a \geq 4$ donc $N_{a,2} \geq N_{1,1} = 16 > 6$.

□

6.5.2 Cas général

On rappelle qu'une partition est dite propre si ce n'est pas une équerre, et que l'ensemble des partitions propres de n est subdivisée entre l'ensemble F_n des partitions propres symétriques et l'ensemble E_n de celles qui ne le sont pas.

Pour une partition λ donnée, on notera

$$P_E(\lambda) = E_n \cap P(\lambda) \text{ et } P_F(\lambda) = F_n \cap P(\lambda).$$

Remarquons enfin que, si $\lambda \in E_n \cup F_n$, alors $P(\lambda)$ ne contient aucune représentation de dimension 1. De plus, dire dans ce cas que $P(\lambda)$ contient une équerre équivaut à dire que λ est de la forme $\mathbb{D}(a, b)$ pour certains $a, b \geq 0$.

Proposition 6. *Soit $n \geq 7$. Si (HR_{n-1}) est vraie, on a $\lambda \in E_n \Rightarrow \text{rg}(\mathfrak{g}_\lambda) > \frac{\dim(\lambda)}{2}$ et $\lambda \in F_n \Rightarrow \text{rg}(\mathfrak{g}_\lambda) > \frac{\dim(\lambda)}{4}$.*

Démonstration. Si $P(\lambda)$ contient une équerre, alors λ est de la forme $\mathbb{D}(a, b)$ pour certains $a, b \geq 0$. On en déduit la conclusion d'après la proposition 4 si a ou b est nul, et d'après le lemme 17 sinon. On peut donc supposer que $P(\lambda) \subset E_n \cup F_n$.

On a $\text{rg}(\mathfrak{g}_\lambda) \geq \text{rg}(\mathfrak{h}_\lambda)$ et, d'après (HR_{n-1}) , on a

$$\mathfrak{h}_\lambda \simeq \left(\bigoplus_{\mu \in P_E(\lambda)/\sim} \mathfrak{sl}(\mu) \right) \oplus \left(\bigoplus_{\mu \in P_F(\lambda)} \mathfrak{osp}(\mu) \right)$$

Supposons d'abord $\lambda \in E_n$. D'après le lemme 4-3), pour $\mu \in P_E(\lambda)$ on a $\mu' \notin P_E(\lambda)$ donc $P_E(\lambda)/\sim$ s'identifie à $P_E(\lambda)$. On déduit alors de la décomposition précédente le rang de $\mathfrak{h}_\lambda$ en fonction de $\delta(\lambda) = \#P(\lambda)$ et de $\dim(\lambda)$, qui vaut $\sum_{\mu \in P(\lambda)} \dim(\mu)$ d'après la règle de Young. En effet, d'après le lemme 4-4), on a $\#P_F(\lambda) \leq 1$. Comme $\text{rg}(\mathfrak{sl}(\mu)) = \dim(\mu) - 1$ et $\text{rg}(\mathfrak{osp}(\mu)) = \frac{\dim(\mu)}{2}$, on obtient immédiatement

1. Si $P_F(\lambda) = \emptyset$, alors $P_E(\lambda) = P(\lambda)$ et $\text{rg}(\mathfrak{h}_\lambda) = \dim(\lambda) - \delta(\lambda)$.

2. Si $P_F(\lambda) = \{\mu_0\}$, alors $\text{rg}(\mathfrak{h}_\lambda) = \dim(\lambda) - \frac{\dim(\mu_0)}{2} - \delta(\lambda) + 1$.

Dans chacun de ces deux cas, vérifions $\text{rg}(\mathfrak{h}_\lambda) > \frac{\dim(\lambda)}{2}$. Dans le premier cas cela signifie $\dim(\lambda) - \delta(\lambda) > \frac{\dim(\lambda)}{2} \Leftrightarrow \dim(\lambda) > 2\delta(\lambda)$, ce qui est vrai d'après le lemme 9, puisque $\lambda \in E_n$ implique $\dim(\lambda) \neq 1$. Dans le deuxième, $\text{rg}(\mathfrak{h}_\lambda) > \frac{\dim(\lambda)}{2}$ signifie $\dim(\lambda) - \dim(\mu_0) > 2(\delta(\lambda) - 1)$. Or, comme λ n'est pas une équerre, tout $\mu \in P(\lambda)$ vérifie $\dim(\mu) > 1$, et donc $\dim(\mu) \geq n - 2 > 4$ d'après le lemme 8. Or

$$\dim(\lambda) - \dim(\mu_0) = \sum_{\mu \in P_E(\lambda)} \dim(\mu) > 4\#P_E(\lambda) = 4(\delta(\lambda) - 1)$$

d'où $\dim(\lambda) - \dim(\mu_0) > 4(\delta(\lambda) - 1) \geq 2(\delta(\lambda) - 1)$, ce qui conclut.

Supposons ensuite $\lambda \in F_n$. D'après le lemme 3 on a $\mu' \in P(\lambda)$ dès que $\mu \in P(\lambda)$, donc $\#(P_E(\lambda)/\sim) = \#P_E(\lambda)/2$ et

$$\sum_{\mu \in P_E(\lambda)/\sim} \dim(\mu) = \frac{1}{2} \sum_{\mu \in P_E(\lambda)} \dim(\mu) = \frac{1}{2} \dim(\lambda) - \frac{1}{2} \sum_{\mu \in P_F(\lambda)} \dim(\mu)$$

Puisque $\#P_F(\lambda) \leq 1$, on a comme précédemment deux cas. On obtient immédiatement

1. Si $P_F(\lambda) = \emptyset$, alors $\#(P_E(\lambda)/\sim) = \delta(\lambda)/2$ et $\text{rg}(\mathfrak{h}_\lambda) = (\dim(\lambda) - \delta(\lambda))/2$.
2. Si $P_F(\lambda) = \{\mu_0\}$, alors $\#(P_E(\lambda)/\sim) = (\delta(\lambda) - 1)/2$ et $\text{rg}(\mathfrak{h}_\lambda) = (\dim(\lambda) - \delta(\lambda) + 1)/2$.

Dans chacun de ces deux cas, vérifions $\text{rg}(\mathfrak{h}_\lambda) > \frac{\dim(\lambda)}{4}$. Dans le premier cas cela signifie $\dim(\lambda) > 2\delta(\lambda)$, ce qui est vrai d'après le lemme 9. Dans le deuxième cas cela signifie $\dim(\lambda) > 2\delta(\lambda) - 2$, ce qui est *a fortiori* vrai pour la même raison et conclut la preuve. $\square$

Pour en déduire les $\mathfrak{g}_\lambda$ nous aurons encore besoin du lemme suivant. Remarquons d'abord que, d'après la règle de Young, si $\mu \subset \lambda$ alors $\mathfrak{g}_\mu$ s'injecte dans $\mathfrak{g}_\lambda$ comme sous-algèbre de Lie.

Lemme 18. *Pour $n \geq 7$ et $\lambda \vdash n$, on a $\text{rg}(\mathfrak{g}_\lambda) \geq 4$. Si $\lambda \in F_n$, on a de plus $\text{rg}(\mathfrak{g}_\lambda) \geq 8$.*

Démonstration. Si λ est une équerre, alors $\text{rg}(\mathfrak{g}_\lambda) = n - 2 \geq 5$ d'après la proposition 4. Si $\lambda \in E_n$ et $n \geq 7$, on ne peut avoir $\lambda_1 < 3$ et $\lambda'_1 < 3$, car sinon $n = \lambda_1 + \lambda_2 \leq 4$. Comme $\mathfrak{g}_\lambda \simeq \mathfrak{g}'_\lambda$ on peut donc supposer $\lambda_1 \geq 3$. Alors $\lambda_2 \geq 2$ car sinon λ serait une équerre. Ainsi $[3, 2] \subset \lambda$ et $\mathfrak{g}_\lambda$ contient $\mathfrak{g}_{[3,2]}$ qui est de rang 4 par surjectivité de ϕ_5 (proposition 5) donc $\text{rg}(\mathfrak{g}_\lambda) \geq 4$. Si enfin $\lambda \in F_n$, on a donc également $\lambda'_1 = \lambda_1 \geq 3$, et $\lambda_2 \geq 2$ puisque λ n'est pas une équerre, ainsi $\mathfrak{g}_\lambda$ contient $\mathfrak{g}_{[3,2,1]}$ qui est de rang 8 par surjectivité de ϕ_6 d'où $\text{rg}(\mathfrak{g}_\lambda) \geq 8$. $\square$

Proposition 7. *Soit $n \geq 7$. Si (HR_{n-1}) est vraie, alors $\lambda \in E_n \Rightarrow \mathfrak{g}_\lambda = \mathfrak{sl}(\lambda)$ et $\lambda \in F_n \Rightarrow \mathfrak{g}_\lambda = \mathfrak{osp}(\lambda)$.*

Démonstration. Les idéaux simples de l'algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{h}_\lambda$ sont de la forme $\mathfrak{sl}(\mu)$, $\mathfrak{osp}(\mu)$ pour $\mu \nearrow \lambda$ et $\mu \in E_{n-1} \cup F_{n-1}$, ou bien isomorphe à $\mathfrak{sl}(\alpha) \simeq \mathfrak{sl}_{n-2}(\mathbb{C})$.

Dans les deux premiers cas, d'après la règle de Young, la restriction de λ à cet idéal simple comporte toujours la représentation standard de $\mathfrak{sl}(\mu)$ ou $\mathfrak{osp}(\mu)$ avec multiplicité 1.

Dans le deuxième cas, c'est-à-dire si λ est de la forme $D(a, b)$, la restriction à l'idéal simple $\mathfrak{sl}(\alpha)$ est somme de la puissance alternée r -ième de sa représentation standard, pour

$[n-1-r, 1^r] = [a+2, 1^{b+1}] \nearrow \mathbf{D}(a, b)$, et de copies de la représentation triviale. Cette puissance alternée étant non triviale, puisque $r = b + 1 \geq 1$, elle intervient bien avec multiplicité 1.

Le lemme 15 et la remarque qui le suit permettent de déduire de la proposition 6 que $\mathfrak{g}_\lambda$ est une algèbre de Lie simple. Si $\lambda \in E_n$, le fait que $\text{rg}(\mathfrak{g}_\lambda) > \dim(\lambda)/2$ permet de déduire du lemme 13 que $\mathfrak{g}_\lambda = \mathfrak{sl}(\lambda)$. Si $\lambda \in F_n$, on a $\text{rg}(\mathfrak{g}_\lambda) \geq 8$ d'après le lemme 18. Comme $\text{rg}(\mathfrak{g}_\lambda) > \dim(\lambda)/4$ d'après la proposition 6, on déduit du lemme 14 que $\mathfrak{g}_\lambda$ est l'ensemble des éléments de $\mathfrak{sl}(\lambda)$ qui laissent invariant un certain sous-espace, de dimension 1, de $\lambda^* \otimes \lambda^*$. Or cet espace contient les $\mathfrak{osp}(\lambda)$ -invariants de $\lambda^* \otimes \lambda^*$ puisque $\mathfrak{g}_\lambda \subset \mathfrak{osp}(\lambda)$, qui forment également un sous-espace de dimension 1. On en déduit $\mathfrak{g}_\lambda = \mathfrak{osp}(\lambda)$. $\square$

6.6 Idéaux simples de $\mathfrak{g}'_n$

Soit $r \in \mathbb{N}$, et $\lambda \vdash r$. On note $\mathfrak{g}^\lambda$ l'idéal de $\mathfrak{g}'_r$ associé à la représentation $\rho_\lambda : \mathfrak{g}'_n \rightarrow \mathfrak{g}_\lambda$, c'est-à-dire l'orthogonal du noyau de ρ_λ vis-à-vis de la forme de Killing de l'algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}'_r$. Par définition, ρ_λ induit un isomorphisme d'algèbres de Lie entre $\mathfrak{g}^\lambda$ et $\mathfrak{g}_\lambda$.

Les factorisations de la section 5 impliquent que $\mathfrak{g}^\lambda = \mathfrak{g}^{\lambda'}$, et que $\mathfrak{g}^\lambda = \mathfrak{g}^\alpha \simeq \mathfrak{sl}_{n-1}(\mathbb{C})$ si λ est une équerre. En tant qu'algèbre de Lie semi-simple, $\mathfrak{g}'_r$ est produit de ses idéaux simples.

Considérons la propriété

$$(IS_r) \quad \text{Si } \lambda, \mu \vdash r \text{ sont tels que } \{\lambda, \mu\} \cap (E_r \cup F_r) \neq \emptyset, \text{ alors } \mathfrak{g}^\lambda = \mathfrak{g}^\mu \Leftrightarrow \mu \in \{\lambda, \lambda'\}$$

Le lemme suivant est immédiat.

Lemme 19. *Si ϕ_r est surjectif, les idéaux simples de $\mathfrak{g}'_r$ sont $\mathfrak{g}^\alpha$ et les $\mathfrak{g}^\lambda$ pour $\lambda \in E_r \cup F_r$, et (IS_r) est vérifiée.*

Il admet une réciproque partielle

Lemme 20. *Sous (HR_{n-1}) , si (IS_n) est vérifiée, alors ϕ_n est surjectif.*

Démonstration. Comme $\mathfrak{g}'_n$ est semi-simple, elle est produit de ses idéaux simples. D'après la proposition 7, pour tout $\lambda \in E_n \cup F_n$, $\mathfrak{g}^\lambda \simeq \mathfrak{g}_\lambda$ est simple. L'hypothèse (IS_n) dit alors que l'on ne peut avoir $\mathfrak{g}^\lambda = \mathfrak{g}^\mu$ que si λ et μ sont des équerres, ou bien si $\mu \in \{\lambda, \lambda'\}$. Ainsi,

$$\mathfrak{g}'_n \supset \mathfrak{g}^\alpha \times \prod_{\lambda \in E_n / \sim} \mathfrak{g}^\lambda \times \prod_{\lambda \in F_n} \mathfrak{g}^\lambda,$$

c'est-à-dire que $\mathfrak{g}'_n$ contient une algèbre de Lie qui, d'après la proposition 7, a même dimension que l'ensemble d'arrivée de ϕ_n , donc ϕ_n est surjectif. $\square$

6.7 Conclusion de la démonstration

Remarquons d'abord que, d'après le lemme 18 et si $n \geq 7$, un idéal simple $\mathfrak{g}^\lambda$ ne peut être simultanément de type A_r, B_r, C_r ou D_r , puisque ces types sont deux-à-deux non isomorphes pour $r \geq 4$.

Supposant (HR_{n-1}) il s'agit maintenant, d'après le lemme 20, de montrer que la propriété $(IS)_n$ est vérifiée, c'est-à-dire que, si $\lambda, \mu \vdash n$ ne sont pas toutes deux des équerres et $\mathfrak{g}^\lambda = \mathfrak{g}^\mu$, alors $\mu \in \{\lambda, \lambda'\}$. Soient donc deux tels λ, μ .

Si λ ou μ est une équerre, on peut donc supposer que seul $\lambda \notin E_n \cup F_n$. Ainsi $\mathfrak{g}^\lambda = \mathfrak{g}^\alpha$ est de type A_{n-2} , donc ne peut être isomorphe à une algèbre de Lie orthogonale ou symplectique. On

en déduit $\mu \in E_n$, et ainsi $\mathfrak{g}^\mu$ est de type $A_{\dim(\mu)-1}$. Alors $\mathfrak{g}^\lambda = \mathfrak{g}^\mu$ implique $n - 2 = \dim \mu - 1$ soit $\dim \mu = n - 1$, ce qui est impossible d'après le lemme 8 puisque $\mu \in E_n$.

On suppose désormais $\lambda, \mu \in E_n \cup F_n$. D'après la remarque précédente on a alors, soit $\lambda, \mu \in E_n$, soit $\lambda, \mu \in F_n$. Les représentations $\lambda, \lambda', \mu, \mu'$ de $\mathfrak{g}'_n$ se factorisent dans tous les cas par un même idéal simple $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}^\lambda = \mathfrak{g}^\mu$ de $\mathfrak{g}'_n$.

Si $\lambda, \mu \in E_n$, alors l'idéal simple $\mathfrak{a}$ est de type A_{N-1} , avec $N = \dim(\lambda) = \dim(\mu)$. On a $N \geq 5$ d'après le lemme 18. Si $\mu \notin \{\lambda, \lambda'\}$, ce qui est équivalent à $\mu' \notin \{\lambda, \lambda'\}$, alors λ, λ', μ seraient trois représentations irréductibles de $\mathfrak{a}$ de dimension N , deux-à-deux non isomorphes d'après la proposition 2. C'est exclu car une algèbre de Lie simple de type A_{N-1} n'admet à isomorphisme près que deux représentations irréductibles de dimension N , pour tout $N \geq 3$.

Si $\lambda, \mu \in F_n$, alors $\mathfrak{a}$ est de type B_r, C_r ou D_r pour $r = N/2$, avec $N = \dim(\lambda) = \dim(\mu)$, d'après la proposition 7. De plus $r \geq 8$ d'après le lemme 18. Or, pour $r \geq 5$ les algèbres de Lie simples de type B_r, C_r ou D_r n'admettent à isomorphisme près qu'une représentation irréductible de dimension $2r$. Ainsi λ et μ sont isomorphes en tant que représentations de $\mathfrak{g}'_n$, donc de $\mathfrak{S}_n$ d'après la proposition 2, soit $\lambda = \mu$. Ceci conclut la démonstration du théorème A.

7 Enveloppes algébriques

7.1 Rappels et compléments sur les groupes algébriques

Soient K un corps de caractéristique 0 et G un sous-groupe de $GL_N(K)$. On note $\overline{G}$ et on appelle enveloppe algébrique de G le plus petit sous-groupe algébrique de $GL_N(K)$ qui contient G . Si H est un sous-groupe (distingué) de G , alors $\overline{H}$ est un sous-groupe (distingué) de $\overline{G}$.

Le groupe $\overline{G}$ est l'adhérence de G dans $GL_N(K)$ pour la topologie de Zariski. En particulier, il existe des fonctions polynomiales $a_1, \dots, a_r$ sur K^{N^2} qui définissent $\overline{G}$, c'est-à-dire telles que

$$\overline{G} = \{m \in GL_N(K) \mid a_1(m) = \dots = a_r(m) = 0\}$$

Si K est le corps des fractions d'un anneau A , on peut de plus supposer que $a_1, \dots, a_r$ sont à coefficients dans A .

Le groupe algébrique G définit un foncteur $\mathcal{A} \rightarrow \overline{G}(\mathcal{A})$ des K -algèbres commutatives à unité vers les groupes. On appelle $\mathcal{A}$ -point de $\overline{G}$ un élément de $\overline{G}(\mathcal{A})$. On note $\text{Lie } \overline{G}$ l'algèbre de Lie de $\overline{G}$. Il s'agit d'une K -sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}_N(K)$, qui peut être définie en caractéristique 0 par la théorie de l'exponentiation formelle de Chevalley telle qu'établie dans [Ch51] §12

$$\text{Lie } \overline{G} = \{x \in \mathfrak{gl}_N(K) \mid \exp(ux) \in \overline{G}(K[[u]])\}$$

Soit $\mathbb{k}$ un corps, prenons $A = \mathbb{k}[[h]]$ l'anneau des séries formelles correspondant et $K = \mathbb{k}((h))$ son corps de fractions. En plus des raisonnements précédents, on a dans ce cadre le résultat suivant :

Lemme 21. *Soit G un sous-groupe de $GL_N(K)$, et $X = \exp(hx) \in G$ avec $x \in \mathfrak{gl}_N(A)$. Alors $x \in \text{Lie } \overline{G}$.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que $\exp(ughx) \in \overline{G}(K[[u]])$, puisque $hx \in \text{Lie } \overline{G}$ si et seulement si $x \in \text{Lie } \overline{G}$. Notons $a_1, \dots, a_r$ une famille de fonctions polynomiales définissant $\overline{G}$, que l'on choisit à coefficients dans A . Alors on montre facilement que $Q_i(u) = a_i(\exp(ughx)) \in$

$M_N(L)$ avec $L = (\mathbb{k}[u])[h]$, c'est-à-dire $Q_i(u) = \sum_{j=0}^{\infty} b_{i,j}(u)h$ avec $b_{i,j} \in \mathbb{k}[u]$. En particulier, $\exp(uhx) \in \overline{G}(K[[u]])$ si et seulement si $b_{i,j} = 0$ pour tout $1 \leq i \leq r$ et $j \in \mathbb{N}$. Or, si $X \in G$, on a $X^n \in G \subset \overline{G}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, c'est-à-dire $b_{i,j}(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, ce qui implique $b_{i,j} = 0$ par Zariski-densité de $\mathbb{Z}$ dans tout corps $\mathbb{k}$ de caractéristique 0. $\square$

Autrement dit, on a

$$\mathrm{Lie}\overline{G} \supset \{x \in \mathfrak{gl}_N(A) \mid \exp(hx) \in G\}$$

Nous rappelons également sous forme de lemme le résultat suivant de la théorie élémentaire des groupes algébriques

Lemme 22. *Soient H et G deux sous-groupes algébriques de $GL_N(K)$. Si G est irréductible, $H \subset G$ et $\mathrm{Lie}H = \mathrm{Lie}G$, alors $H = G$.*

Démonstration. Soit H_0 la composante connexe de H . C'est un sous-groupe algébrique irréductible d'indice fini de H . On a donc $\mathrm{Lie}H_0 = \mathrm{Lie}H$ et $\mathrm{Lie}H_0 = \mathrm{Lie}G$ par hypothèse. Comme $H_0 \subset G$ et que H_0 et G sont irréductibles, on en déduit $H_0 = G$ (cf. [Ch51], thm. 8 cor. 1), donc $H = G$. $\square$

7.2 Préliminaires sur les groupes orthogonaux et symplectiques

7.2.1 Notations

Soit $\mathbb{k}$ un corps de caractéristique nulle, et $n = 2p \geq 2$ un entier positif pair. On munit $\mathbb{k}^n$ de son produit scalaire standard $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On introduit les matrices de $GL_n(\mathbb{k})$ suivantes, définies par blocs de taille $p \times p$:

$$D_o = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad D_s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et l'on note également $H \in GL_n(\mathbb{k})$ la matrice diagonale dont le premier coefficient vaut -1 et les suivants 1. Outre $SL_n(\mathbb{k})$, un autre sous-groupe de $GL_n(\mathbb{k})$ important pour nous est

$$\widetilde{SL}_n(\mathbb{k}) = \{A \in GL_n(\mathbb{k}) \mid \det A = \pm 1\}$$

dont $SL_n(\mathbb{k})$ est un sous-groupe d'indice 2.

7.2.2 Cas orthogonal

Soit $(\mid)$ la forme bilinéaire symétrique définie sur $\mathbb{k}^n$ par $(x \mid y) = \langle D_o x \mid y \rangle$. Pour tout $A \in GL_n(\mathbb{k})$, on note A^* son adjoint par rapport à cette forme. Cela nous permet d'introduire les groupes

$$O_{p,p}(\mathbb{k}) = \{A \in GL_n(\mathbb{k}) \mid A^{-1} = A^*\} \quad \widetilde{O}_{p,p}(\mathbb{k}) = \{A \in GL_n(\mathbb{k}) \mid A^{-1} = \pm A^*\}$$

On a un morphisme $\varphi : \widetilde{O}_{p,p}(\mathbb{k}) \rightarrow \{\pm 1\}$ défini par $\varphi(A) = u$ si $A^{-1} = uA^*$, qui est surjectif car $J \in \widetilde{O}_{p,p}(\mathbb{k})$ et $\varphi(J) = -1$. On en déduit une suite exacte scindée

$$1 \rightarrow O_{p,p}(\mathbb{k}) \rightarrow \widetilde{O}_{p,p}(\mathbb{k}) \rightarrow \{\pm 1\} \rightarrow 1$$

Le groupe spécial orthogonal est défini par $SO_{p,p}(\mathbb{k}) = \{A \in O_{p,p}(\mathbb{k}) \mid \det(A) = 1\}$. L'application $\varphi \times \det$ induit alors une suite

$$1 \rightarrow SO_{p,p}(\mathbb{k}) \rightarrow \widetilde{O}_{p,p}(\mathbb{k}) \rightarrow \{\pm 1\}^2 \rightarrow 1$$

qui est exacte et scindée pour tout $p \geq 1$. En effet, on vérifie facilement

$$\begin{cases} \det(J) = (-1)^p \\ \varphi(J) = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} \det(H) = -1 \\ \varphi(H) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \det(JH) = (-1)^{p+1} \\ \varphi(JH) = -1 \end{cases}$$

A chacun des trois sous-groupes propres de $\{\pm 1\}^2$ sont ainsi associés trois sous-groupes (distingués) d'indice deux de $\widetilde{O}_{p,p}(\mathbb{k})$ qui contiennent $SO_{p,p}(\mathbb{k})$. Ce sont

$$\begin{aligned} \widetilde{SO}_{p,p}^1(\mathbb{k}) &= SL_n(\mathbb{k}) \cap \widetilde{O}_{p,p}(\mathbb{k}) \\ \widetilde{SO}_{p,p}^2(\mathbb{k}) &= O_{p,p}(\mathbb{k}) \\ \widetilde{SO}_{p,p}^3(\mathbb{k}) &= \{A \in \widetilde{SL}_n(\mathbb{k}) \mid A^{-1} = \det(A)A^*\} \end{aligned}$$

Par convention, on notera ici

$$\begin{aligned} \widetilde{SO}_{p,p}(\mathbb{k}) &= \widetilde{SO}_{p,p}^1(\mathbb{k}) \quad \text{si } p \text{ est pair,} \\ \widetilde{SO}_{p,p}(\mathbb{k}) &= \widetilde{SO}_{p,p}^3(\mathbb{k}) \quad \text{si } p \text{ est impair.} \end{aligned}$$

7.2.3 Cas symplectique

On considère la forme bilinéaire antisymétrique non dégénérée définie sur $\mathbb{k}^n$ par $(x|y) = \langle D_s x, y \rangle$. On note encore A^* l'adoint de A par rapport à $(\mid)$ et on définit les groupes

$$\begin{aligned} Sp_n(\mathbb{k}) &= \{A \in GL_n(\mathbb{k}) \mid A^{-1} = A^*\} \\ \widetilde{Sp}_n(\mathbb{k}) &= \{A \in GL_n(\mathbb{k}) \mid A^{-1} = \pm A^*\} \end{aligned}$$

On a $Sp_n(\mathbb{k}) \subset SL_n(\mathbb{k})$, $\widetilde{Sp}_n(\mathbb{k}) \subset \widetilde{SL}_n(\mathbb{k})$ et $Sp_n(\mathbb{k}) \neq \widetilde{Sp}_n(\mathbb{k})$ parce que $J \in \widetilde{Sp}_n(\mathbb{k}) \setminus Sp_n(\mathbb{k})$. On a ainsi une suite exacte scindée

$$1 \rightarrow Sp_n(\mathbb{k}) \rightarrow \widetilde{Sp}_n(\mathbb{k}) \rightarrow \langle J \rangle$$

8 Groupes de tresses et algèbres de Hecke

Dans ce qui suit, on fixe un corps $\mathbb{k}$ de caractéristique nulle. L'objet de cette section est de rappeler des propriétés des groupes de tresses et leur relation avec l'algèbre de Hecke de type A . Notamment, on

8.1 Groupes de tresses

Pour tout $n \geq 2$, on note $\mathbf{B}_n$ le groupe de tresses à n brins, défini par générateurs $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ et relations

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ pour } |i - j| \geq 2, \text{ et } \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \text{ pour } 1 \leq i \leq n - 2.$$

Une conséquence immédiate de ces relations est que les éléments σ_i pour $1 \leq i \leq n-1$, appelés générateurs d'Artin, sont conjugués entre eux. Pour les autres résultats classiques concernant ce groupe, que nous ne faisons que rappeler, on pourra se reporter à [A47]. Le morphisme surjectif $\mathbf{B}_n \rightarrow \mathfrak{S}_n$ défini par $\sigma_i \mapsto s_i = (i \ i+1)$ admet pour noyau le groupe de tresses pures, noté $\mathbf{P}_n$, qui est engendré par les éléments ξ_{ij} , pour $1 \leq i < j \leq n$, définis par

$$\xi_{ij} = \sigma_{j-1} \dots \sigma_{i+1} \sigma_i^2 \sigma_{i+1}^{-1} \dots \sigma_{j-1}^{-1}.$$

A ce groupe est associée une $\mathbb{k}$ -algèbre de Lie, dite des tresses infinitésimales pures, définie par générateurs t_{ij} , $1 \leq i, j \leq n$, et relations

$$\begin{aligned} t_{ij} &= t_{ji}, t_{ii} = 0, \\ [t_{ij}, t_{kl}] &= 0 \text{ si } \#\{i, j, k, l\} = 4, \\ [t_{ij}, t_{ik} + t_{kj}] &= 0 \text{ pour tous } i, j, k \end{aligned}$$

Elle est graduée, ainsi que son algèbre enveloppante universelle $U\mathcal{T}_n$ par $\deg(t_{ij}) = 1$. On note $\widehat{\mathcal{T}_n}$ et $\widehat{U\mathcal{T}_n}$ les complétions de ces algèbres par rapport à leurs graduations respectives, $\exp \mathcal{T}_n \subset \widehat{U\mathcal{T}_n}$ le groupe pro-algébrique associé à $\mathcal{T}_n$.

Cette algèbre de Lie, son algèbre enveloppante et leurs complétions respectives sont de plus naturellement munies d'une action par automorphismes naturelle de $\mathfrak{S}_n$, par $s.t_{i,j} = t_{s(i),s(j)}$ pour tout $s \in \mathfrak{S}_n$. Cela permet d'introduire une $\mathbb{k}$ -algèbre de Hopf complétée $\mathbb{k}\mathfrak{S}_n \ltimes \widehat{U\mathcal{T}_n}$, dans laquelle on peut construire le groupe $\mathfrak{S}_n \ltimes \exp \widehat{\mathcal{T}_n}$. Dans [Dr90], V. Drinfel'd a défini des morphismes injectifs $\tilde{\Phi} : \mathbf{B}_n \rightarrow \mathfrak{S}_n \ltimes \exp \widehat{\mathcal{T}_n}$ tels que $\tilde{\Phi}(\sigma_i) = \Phi_i s_i \exp(t_{i,i+1}) \Phi_i^{-1}$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$, avec $\Phi_i \in \exp \widehat{\mathcal{T}_n}$ et $\Phi_1 = 1$. On fixe un tel morphisme.

On vérifie facilement $\tilde{\Phi}(\mathbf{P}_n) \subset \exp \widehat{\mathcal{T}_n}$, et $\tilde{\Phi}(\xi_{ij}) = \exp \psi_{ij}$ avec $\psi_{ij} \in 2t_{ij} + [\widehat{\mathcal{T}_n}, \widehat{\mathcal{T}_n}]$. Un sous-groupe distingué remarquable de $\mathbf{P}_n$ est le sous-groupe $\mathbf{F}_n$ engendré par les éléments $\xi_{1,n}, \dots, \xi_{n-1,n}$. C'est un groupe libre en ces $n-1$ générateurs. Parallèlement, il est facile de vérifier que la sous-algèbre de Lie $\mathcal{F}_n$ de $\mathcal{T}_n$ engendrée par les éléments $t_{1,n}, \dots, t_{n-1,n}$ est libre en ces générateurs et est un idéal de $\mathcal{T}_n$. Il s'ensuit que $\tilde{\Phi}(\mathbf{F}_n) \subset \exp \widehat{\mathcal{F}_n}$.

Un dernier sous-groupe qui intervient ici est le sous-groupe $\mathbf{B}_n^2$ des tresses paires. C'est le noyau de la composition du morphisme naturel $\pi : \mathbf{B}_n \rightarrow \mathfrak{S}_n$ et de la signature $\mathfrak{S}_n \rightarrow \{\pm 1\}$, c'est-à-dire $\pi^{-1}(\mathfrak{A}_n)$ où $\mathfrak{A}_n$ désigne le groupe alterné sur n lettres. On a évidemment les inclusions

$$\mathbf{F}_n \subset \mathbf{P}_n \subset \mathbf{B}_n^2 \subset \mathbf{B}_n$$

8.2 Algèbres de Hecke

Pour tout $n \geq 3$, on définit habituellement l'algèbre de Hecke de type A_{n-1} , que l'on note $H_n(q)$, sur un corps K de caractéristique nulle, dans lequel on a choisi un élément q transcendant sur le corps premier. C'est une K -algèbre définie par générateurs $\mathfrak{s}_1, \dots, \mathfrak{s}_{n-1}$ et relations

$$\begin{aligned} \mathfrak{s}_i \mathfrak{s}_j &= \mathfrak{s}_j \mathfrak{s}_i && \text{pour } |i - j| \geq 2 \\ \mathfrak{s}_i \mathfrak{s}_{i+1} \mathfrak{s}_i &= \mathfrak{s}_{i+1} \mathfrak{s}_i \mathfrak{s}_{i+1} && \text{pour } 1 \leq i \leq n-2 \\ (\mathfrak{s}_i - q)(\mathfrak{s}_i + q^{-1}) &= 0 && \text{pour } 1 \leq i \leq n-1 \end{aligned}$$

Il est clair que $H_n(q)$ est un quotient de l'algèbre de groupe $K\mathbf{B}_n$ de $\mathbf{B}_n$ sur K : plus précisément, c'est le quotient de $K\mathbf{B}_n$ par l'idéal bilatère engendré par les éléments $(\sigma_i - q)(\sigma_i + q^{-1})$. Comme les générateurs d'Artin sont conjugués entre eux, cet idéal est engendré par un seul élément, par exemple $(\sigma_1 - q)(\sigma_1 + q^{-1})$.

Ainsi, toute représentation de $H_n(q)$ sur K s'étend en une représentation de $K\mathbf{B}_n$ et réciproquement toute représentation de $K\mathbf{B}_n$ dans laquelle l'élément $(\sigma_1 - q)(\sigma_1 + q^{-1})$ agit trivialement se factorise par $H_n(q)$.

A isomorphisme près, $H_n(q)$ ne dépend pas de l'élément transcendant q que l'on a choisi, et peut être définie sur $\mathbb{k}(q)$; le choix du corps K est donc de peu d'importance. Pour nos besoins, il sera commode de prendre pour K le corps $\mathbb{k}((h))$ des séries de Laurent en une indéterminée sur $\mathbb{k}$, et $q = e^h$.

Un résultat de Tits ([Bour] ch. 4 ex. 26 et ex. 27) montre de plus que $H_n(q)$ est de dimension finie et isomorphe à l'algèbre de groupe $K\mathfrak{S}_n$. On peut obtenir un tel isomorphisme à l'aide du morphisme $\tilde{\Phi}$ choisi précédemment.

En effet, notant $A = \mathbb{k}[[h]]$ l'anneau des séries formelles en une indéterminée sur $\mathbb{k}$, on vérifie facilement que l'application $t_{ij} \rightarrow h(i\ j)$ s'étend naturellement en un morphisme d'algèbres de Lie surjectif de $\mathcal{T}_n$ vers $\mathfrak{g}_n^h = \mathfrak{g}_n \otimes A$, donc de l'algèbre enveloppante $U\mathcal{T}_n$ vers l'algèbre de groupe $A\mathfrak{S}_n$ de $\mathfrak{S}_n$ sur l'anneau $A = \mathbb{k}[[h]]$ des séries formelles. Ce morphisme étant continu pour la topologie h -adique respectivement à la graduation de $U\mathcal{T}_n$, il s'étend à $\widehat{U\mathcal{T}_n}$. Comme ce morphisme est $\mathfrak{S}_n$ -équivariant, $\tilde{\Phi}$ permet d'en déduire un morphisme $A\mathbf{B}_n \rightarrow A\mathfrak{S}_n$, dont la réduction à $h = 0$ est surjective. On en déduit un morphisme surjectif $K\mathbf{B}_n \rightarrow K\mathfrak{S}_n$. L'image de σ_1 est alors $X = s_1 \exp(hs_1)$. De $s_1^2 = 1$ on déduit

$$\exp(hs_1) = \frac{q + q^{-1}}{2} + \frac{q - q^{-1}}{2}s_1$$

et finalement $(X - q)(X + q^{-1}) = 0$. On en déduit un morphisme surjectif explicite $H_n(q) \rightarrow K\mathfrak{S}_n$, qui est un isomorphisme par égalité des dimensions, et pour lequel l'image de $\mathfrak{s}_1$ est $s_1 \exp(hs_1)$.

Pour étudier l'image du groupe de tresses dans $H_n(q)$ il suffit donc d'étudier l'image de $\mathbf{B}_n$ par $\mathfrak{P} : K\mathbf{B}_n \rightarrow K\mathfrak{S}_n$ obtenu par composition du morphisme précédent avec la projection naturelle $K\mathbf{B}_n \rightarrow H_n(q)$. Puisque $\Phi(\mathbf{P}_n) \subset \exp \widehat{\mathcal{T}_n}$, on sait d'ores et déjà que $\mathfrak{P}(\mathbf{P}_n) \subset \exp \mathfrak{g}_n^h$.

8.3 Représentations de l'algèbre de Hecke

A toute représentation $\rho : \mathfrak{S}_n \rightarrow GL(V)$, où V est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{k}$, on peut associer par extension des scalaires une représentation encore notée ρ de $K\mathfrak{S}_n$ sur $V^h = V \otimes K$.

On en déduit une représentation $R = \rho \circ \mathfrak{P}$ de $\mathbf{B}_n$ sur V^h telle que, si l'on note $x = \rho(s_1)$, alors $R(\sigma_1) = xe^{hx}$. En particulier, $\det(R(\sigma_i)) = \det(x) \exp(h \operatorname{tr}(x))$ pour tout $1 \leq i \leq n - 1$ puisque les générateurs d'Artin sont conjugués entre eux.

Considérons le cas où ρ est une représentation irréductible, associée à une partition λ de n . Alors $\operatorname{tr}(x) = \gamma(\lambda)$, valeur du caractère associé à λ sur la classe de conjugaison de $\mathfrak{S}_n$ formée des transpositions. Comme $x^2 = 1$, la valeur $\eta(\lambda) = \det(x)$ appartient à $\{\pm 1\}$.

Les valeurs $\dim(\lambda)$, $\gamma(\lambda)$ et $\eta(\lambda)$ sont reliées entre elles. En effet, si l'on note $a_{\pm}$ la multiplicité avec laquelle ± 1 intervient dans le spectre de x , on a $\dim(\lambda) = a_+ + a_-$ et $\gamma(\lambda) = a_+ - a_-$, donc

$$\eta(\lambda) = (-1)^{a_-} = (-1)^{\frac{\dim(\lambda) - \gamma(\lambda)}{2}}$$

Si $\lambda = \lambda'$, les tableaux standards de forme λ et les formes bilinéaires définies en section 4.2 permettent d'identifier λ^h à K^N pour $N = \dim(\lambda)$, muni de l'une des formes bilinéaires étudiée en 7.2. Si cette forme est symétrique, on note

$$OSP(\lambda^h) = SO_{\frac{N}{2}, \frac{N}{2}}(K) \quad \widetilde{OSP}(\lambda^h) = \widetilde{SO}_{\frac{N}{2}, \frac{N}{2}}(K)$$

$\gamma(\lambda) = 0$	$\eta(\lambda) = 1$	$R(\mathbf{B}_n) \subset SL(\lambda^h)$	$R(\mathbf{B}_n^2) \subset SL(\lambda^h)$
	$\eta(\lambda) = -1$	$R(\mathbf{B}_n) \subset \widetilde{SL}(\lambda^h)$ et $R(\mathbf{B}_n) \not\subset SL(\lambda^h)$	
$\lambda = \lambda'$		$R(\mathbf{B}_n) \subset \widetilde{OSP}(\lambda^h)$ et $R(\mathbf{B}_n) \not\subset OSP(\lambda^h)$	$R(\mathbf{B}_n^2) \subset OSP(\lambda^h)$

TAB. 1 – Inclusions remarquables.

et si elle est antisymétrique,

$$OSP(\lambda^h) = Sp_N(K) \quad \widetilde{OSP}(\lambda^h) = \widetilde{Sp}_N(K).$$

On rappelle que dans ces deux cas on a une suite exacte scindée

$$1 \rightarrow OSP(\lambda^h) \rightarrow \widetilde{OSP}(\lambda^h) \rightarrow \{\pm 1\} \rightarrow 1$$

Le tableau 1 résume les propriétés que vérifient, dans ces cas particuliers, l'image de $\mathbf{B}_n$. Leur démonstration est l'objet des alinéas qui suivent.

8.3.1 Cas $\gamma(\lambda) = 0$.

Si $\gamma(\lambda) = 0$, alors $\det R(\sigma_i) = \eta(\lambda)$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$, donc $R(\sigma_i) \in \widetilde{SL}(\lambda^h)$ et donc $R(\mathbf{B}_n) \subset \widetilde{SL}(\lambda^h)$. En revanche, si $\eta(\lambda) = -1$, alors $R(\sigma_i) \in \widetilde{SL}(\lambda^h) \setminus SL(\lambda^h)$.

Dans tous les cas, $\det \rho(a) = 1$ pour tout $a \in \mathfrak{A}_n$, donc $R(\mathbf{B}_n^2) \subset SL(\lambda^h)$.

8.3.2 Cas $\lambda = \lambda'$.

Si $\lambda = \lambda'$, alors $\gamma(\lambda) = 0$. Cette situation est donc un cas particulier du paragraphe précédent. De plus $\dim(\lambda)$ est pair et, posant $\dim(\lambda) = 2p$, on a donc $\eta(\lambda) = (-1)^p$. Puisque l'on a $-\rho(s_1)^* = \rho(s_1) = \rho(s_1)^{-1}$, cela implique par la définition choisie de $\widetilde{OSP}(\lambda^h)$ que $\rho(s_1) \in \widetilde{OSP}(\lambda^h) \setminus OSP(\lambda^h)$. Comme d'autre part $\rho(\mathfrak{g}_n) \subset \mathfrak{osp}(\lambda)$, on en déduit que $R(\sigma_1) \in \widetilde{OSP}(\lambda^h) \setminus OSP(\lambda^h)$.

Enfin, pour tout $a \in \mathfrak{A}_n$, on a $\det \rho(a) = 1$ et, chaque permutation paire étant produit d'un nombre pair de transpositions consécutives, de $-\rho(s_i)^* = \rho(s_i)^{-1}$ on déduit $\rho(a)^* = \rho(a)^{-1}$. Il s'ensuit que $R(\mathbf{B}_n^2) \subset OSP(\lambda^h)$.

8.4 Enveloppe algébrique dans les représentations irréductibles

L'objet de cette section est, notant R_λ la représentation de $\mathbf{B}_n$ déduite comme précédemment d'une partition propre λ de n , de déterminer l'enveloppe algébrique des images de $\mathbf{B}_n$ et de ses sous-groupes remarquables par R_λ . Rappelons que R_λ s'identifie à la représentation de $H_n(q)$ associée à λ .

Théorème B. *Soit $n \geq 3$. Pour toute partition propre $\lambda \vdash n$, les enveloppes algébriques de $R_\lambda(\mathbf{F}_n)$, $R_\lambda(\mathbf{P}_n)$ et $R_\lambda(\mathbf{B}_n^2)$ sont égales à un même groupe algébrique connexe G_λ , dont l'algèbre de Lie est l'image de $\mathfrak{g}_n$ dans $\mathfrak{gl}(\lambda)$, tensorisée par K . Suivant les valeurs de λ , G_λ*

et l'enveloppe algébrique $\widetilde{G}_\lambda$ de $R_\lambda(\mathbf{B}_n)$ valent

	$\gamma(\lambda)$	$\eta(\lambda)$	G_λ	$\widetilde{G}_\lambda$	Exemple de tels λ
$\lambda \neq \lambda'$	$\neq 0$		$GL(\lambda^h)$		$[3, 2]$
	0	1	$SL(\lambda^h)$		$[6, 3, 2, 2, 2]$
		-1	$SL(\lambda^h)$	$\widetilde{SL}(\lambda^h)$	$[9, 3, 3, 3, 3, 1, 1, 1]$
$\lambda = \lambda'$			$OSP(\lambda^h)$	$\widetilde{OSP}(\lambda^h)$	$[2, 2]$

Démonstration. On suppose d'abord $\gamma(\lambda) \neq 0$. Cela implique $\lambda \in E_n$, donc $\mathfrak{g}_\lambda = \mathfrak{sl}(\lambda)$ d'après le théorème A. D'autre part l'action de T_n est un scalaire non nul d'après le lemme 10. Comme $\mathfrak{g}_\lambda = \mathfrak{sl}(\lambda)$ on en déduit que l'image de $\mathfrak{g}_n$ dans $\mathfrak{gl}(\lambda)$ est égale à $\mathfrak{gl}(\lambda)$. D'après le lemme 21 on en déduit $\text{Lie}\overline{R(\mathbf{P}_n)} \supset \mathfrak{gl}(\lambda^h)$ donc $\overline{R(\mathbf{P}_n)} = GL(\lambda^h)$ d'après le lemme 22.

On suppose désormais $\gamma(\lambda) = 0$. Alors l'image de $\mathfrak{g}_n$ dans $\mathfrak{gl}(\lambda)$ est $\mathfrak{g}_\lambda$. Deux cas se présentent.

Si $\lambda \in E_n$, alors $\mathfrak{g}_\lambda = \mathfrak{sl}(\lambda)$, donc $\text{Lie}\overline{R(\mathbf{P}_n)} \supset \mathfrak{sl}(\lambda^h)$. Or $R(\mathbf{P}_n) \subset R(\mathbf{B}_n^2) \subset SL(\lambda^h)$ donc $\overline{R(\mathbf{P}_n)} = \overline{R(\mathbf{B}_n^2)} = SL(\lambda^h)$. Si $\eta(\lambda) = -1$, alors $R(\mathbf{B}_n) \subset \widetilde{SL}(\lambda^h)$ et $R(\mathbf{B}_n) \not\subset SL(\lambda^h)$, donc $SL(\lambda^h) \subsetneq \overline{R(\mathbf{B}_n)} \subset \widetilde{SL}(\lambda^h)$ et $\overline{R(\mathbf{B}_n)} = \widetilde{SL}(\lambda^h)$ parce que $SL(\lambda^h)$ est d'indice 2 dans $\widetilde{SL}(\lambda^h)$. Si $\eta(\lambda) = 1$, on a $R(\mathbf{B}_n) \subset SL(\lambda^h)$ donc $\overline{R(\mathbf{B}_n)} = SL(\lambda^h)$.

Si $\lambda \in F_n$, alors $\mathfrak{g}_\lambda = \mathfrak{osp}(\lambda)$, donc $\text{Lie}\overline{R(\mathbf{P}_n)} \supset \mathfrak{osp}(\lambda^h)$. Or $R(\mathbf{B}_n^2) \subset OSP(\lambda^h)$ donc $\overline{R(\mathbf{P}_n)} = OSP(\lambda^h)$. Puisque $R(\mathbf{B}_n) \subset \widetilde{OSP}(\lambda^h)$ mais $R(\mathbf{B}_n) \not\subset OSP(\lambda^h)$, on en déduit $OSP(\lambda^h) \subsetneq \overline{R(\mathbf{B}_n)} \subset \widetilde{OSP}(\lambda^h)$ et $\overline{R(\mathbf{B}_n)} = \widetilde{OSP}(\lambda^h)$.

Dans tous les cas, les enveloppes algébriques de $R(\mathbf{P}_n)$ et $R(\mathbf{B}_n^2)$ sont donc égales, et sont des groupes connexes dont l'algèbre de Lie est l'image de $\mathfrak{g}_n$ dans $\mathfrak{gl}(\lambda)$, tensorisée par K . Comme $\mathfrak{g}_n$ est engendrée par les transpositions consécutives et $\overline{R(\mathbf{F}_n)} \subset \overline{R(\mathbf{P}_n)}$ on en déduit $\overline{R(\mathbf{F}_n)} = \overline{R(\mathbf{P}_n)} = \overline{R(\mathbf{B}_n^2)}$. $\square$

9 Enveloppe algébrique dans $H_n(q)$

Dans cette section, nous décrivons l'enveloppe algébrique de l'image du groupe de tresses et de ses sous-groupes remarquables dans l'algèbre de Hecke. Plus précisément nous décrivons, ce qui est équivalent, l'enveloppe algébrique de l'image de ces groupes par le morphisme $\mathfrak{P} : K\mathbf{B}_n \rightarrow (K\mathfrak{S}_n)$.

Comme on a un isomorphisme naturel

$$(K\mathfrak{S}_n)^\times \simeq \prod_{\lambda \vdash n} GL(\lambda^h)$$

on identifiera un élément $x \in (K\mathfrak{S}_n)^\times$ à la collection correspondante (x_λ) pour $\lambda \vdash n$, avec $x_\lambda \in GL(\lambda^h)$. Nous commençons par décrire un sous-groupe algébrique de $(K\mathfrak{S}_n)^\times$.

Pour ce faire, on munit comme en 5.1 chaque λ d'un produit scalaire $\mathfrak{S}_n$ -invariant, que l'on étend en une produit scalaire de λ^h . Un tel produit scalaire n'est bien défini qu'à multiplication par un scalaire près, en revanche l'adjoint $x_\lambda^\#$ d'un élément $x_\lambda \in GL(\lambda^h)$ est ne dépend pas du produit scalaire choisi.

On définit $E_n^+ = \{\lambda \in E_n \mid \lambda < \lambda'\}$ et $E_n^- = E_n \setminus E_n^+$. On introduit alors pour tout $\lambda \in E_n^+$ les morphismes de $\mathbb{k}$ -espaces vectoriels $\lambda' \rightarrow \lambda$ définis en 5.1, que l'on étend en des isomorphismes de K -espaces vectoriels de $(\lambda')^h$ vers λ^h .

On rappelle d'autre part que, en tant qu'espace vectoriel et $\mathfrak{S}_n$ -module, α_r s'identifie à la puissance extérieure $\Lambda^r \alpha$. On en déduit un morphisme $\Lambda^r : GL(\alpha^h) \rightarrow GL(\Lambda^r \alpha^h) = \alpha_r^h$, défini par $\Lambda^r y = y \wedge \dots \wedge y$.

Définition 3. Pour tout $n \geq 3$, on note $G_n(q)$ l'ensemble des $(x_\lambda) \in (K\mathfrak{S}_n)^\times$ qui vérifient

1. $P_\lambda x_{\lambda'}^{-1} = x_\lambda^\# P_\lambda$ pour tout $\lambda \in E_n^+$.
2. $x_\lambda \in OSP(\lambda^h)$ pour tout $\lambda \in F_n$.
3. $\det(x_\lambda) = x_{[n]}^{\gamma(\lambda)}$ pour tout $\lambda \vdash n$.
4. $x_{[n]}^{r-1} x_{\alpha_r} = \Lambda^r x_\alpha$ pour tout $r \in [1, n]$.

Pour étudier en particulier les représentations correspondant aux équerres, nous aurons besoin d'un énoncé plus précis que le lemme 12. On introduit, pour tout $a \in \mathbb{k}$, la représentation ψ_a de dimension 1 de l'algèbre de Hopf $\mathbb{k}\mathfrak{S}_n \rtimes \mathcal{UT}_n$ définie par

$$\begin{cases} \psi_a(t_{ij}) = a & \text{pour } 1 \leq i < j \leq n \\ \psi_a(s) = 1 & \text{pour } s \in \mathfrak{S}_n \end{cases}$$

On remarque que $\psi_a = \psi_1^{\otimes a}$ si $a \in \mathbb{N}$, et $\psi_1 = \rho_{[n]}$. La démonstration du lemme 12 montre en fait le résultat suivant

Lemme 23. En tant que représentation de $\mathbb{k}\mathfrak{S}_n \rtimes \widehat{\mathcal{UT}_n}$, on a $\Lambda^r \alpha = \alpha_r \otimes \psi_{r-1}$.

Notant $\Psi_a = \psi_a \circ \mathfrak{P}$, on en déduit immédiatement que, pour tout $g \in \mathbf{B}_n$,

$$R_{\Lambda^r \alpha}(g) = R_{\alpha_r}(g) \Psi_{r-1}(g) = R_{\alpha_r}(g) \Psi_1(g)^{r-1} = R_{\alpha_r}(g) R_{[n]}(g)^{r-1}$$

Lemme 24. $\mathfrak{P}(\mathbf{F}_n) \subset \mathfrak{P}(\mathbf{P}_n) \subset \mathfrak{P}(\mathbf{B}_n^2) \subset G_n(q)$.

Démonstration. Il suffit de montrer $\mathfrak{P}(\mathbf{B}_n^2) \subset G_n(q)$. Pour tout $\lambda \vdash n$, notons ρ_λ et R_λ les représentations de $\mathfrak{g}_n$ et $\mathbf{B}_n$ associées. On a évidemment $\mathfrak{P}(x) = (R_\lambda(x))$ pour tout $x \in \mathbf{B}_n$.

La première équation découle de ce que, notant $\mathfrak{P}(\Phi_i) = \exp(\varphi_i)$ pour un certain $\varphi_i \in \mathfrak{g}_n^h$, et $\Phi_{i,\mu} = \exp(\rho_\mu(\varphi_i))$ on a, pour tous $i \in [1, n-1]$ et $\mu \vdash n$,

$$R_\mu(\sigma_i) = \Phi_{i,\mu} \rho_\mu(s_i) \exp(h\rho_\mu(s_i)) \Phi_{i,\mu}^{-1}$$

Or, d'après la section 5.1, pour tout $u \in \mathfrak{g}_n$, donc pour tout $u \in \mathfrak{g}_n^h$, on a $P_\lambda \rho_{\lambda'}(u) P_\lambda^{-1} = -\rho_\lambda(u)^\#$. D'autre part, pour toute transposition s de $\mathfrak{S}_n$ on a $P_\lambda \rho_{\lambda'}(s) P_\lambda^{-1} = -\rho_\lambda(s)$ donc, pour tout $g \in \mathfrak{A}_n$, on a $P_\lambda \rho_{\lambda'}(g) P_\lambda^{-1} = \rho_\lambda(g)$.

En particulier, pour $\lambda \in E_n^+$,

$$((\Phi_{i,\lambda})^{-1})^\# = \exp(-\rho_\lambda(\varphi_i)) = \exp(P_\lambda \rho_{\lambda'}(\varphi_i) P_\lambda^{-1}) = P_\lambda \Phi_{i,\lambda'} P_\lambda^{-1}$$

donc $(R_\lambda(\sigma_i)^{-1})^\# = -P_\lambda R_{\lambda'}(\sigma_i) P_\lambda^{-1}$. On en déduit que, pour tout $g \in \mathbf{B}_n^2$,

$$R_{\lambda'}(g)^{-1} = P_\lambda^{-1} R_\lambda(g)^\# P_\lambda$$

c'est-à-dire que $\mathfrak{P}(\mathbf{B}_n^2)$ vérifie la première équation de définition de $G_n(q)$.

Le fait que $R_\lambda(\mathbf{B}_n^2) \subset OSP(\lambda^h)$ pour tout λ tel que $\lambda = \lambda'$, donc en particulier pour tout $\lambda \in F_n$, a déjà été démontré.

Soit maintenant $g \in B_n^2$. On a $\mathfrak{P}(g) = \pi(g) \exp(t)$ avec $\pi(g) \in \mathfrak{B}_n$ et $t \in \mathfrak{g}_n^h$. Le centre de $\mathfrak{g}_n^h$ est de dimension 1, engendré par

$$\tilde{T} = \frac{2}{n-1} T_n = \frac{2}{n-1} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (i \ j)$$

D'après le lemme 10, on a $\text{tr} \rho_\lambda(\tilde{T}) = \gamma(\lambda)$ et en particulier $\text{tr} \rho_{[n]}(\tilde{T}) = 1$. Comme $\mathfrak{g}_n^h$ est réductive, il existe $m \in K$ et $t' \in [\mathfrak{g}_n^h, \mathfrak{g}_n^h]$ tels que $t = m\tilde{T} + t'$. En particulier, $R_{[n]}(g) = \exp(m)$. De plus $\det \rho_\lambda(\mathfrak{A}_n) = \{1\}$, donc

$$\det R_\lambda(g) = \exp(m \text{tr} \rho_\lambda(\tilde{T})) = \exp(m \gamma(\lambda)) = R_{[n]}(g)^{\gamma(\lambda)}$$

pour tout $g \in \mathbf{B}_n^2$. Enfin, la dernière équation est une traduction immédiate du fait que $R_{\Lambda^r \alpha}(g) = R_{\alpha_r}(g) R_{[n]}(g)^{r-1}$ pour tout $g \in \mathbf{B}_n^2$. $\square$

Lemme 25. $G_n(q)$ est un sous-groupe algébrique connexe de $(K\mathfrak{S}_n)^\times$, d'algèbre de Lie $\mathcal{L}_n \otimes K \simeq \mathfrak{g}_n^h$.

Démonstration. Comme les équations qui le définissent sont polynomiales, $G_n(q)$ est fermé dans $(K\mathfrak{S}_n)^\times$, qui est d'évidence un groupe algébrique connexe. Il est immédiat qu'il s'agit d'un sous-groupe de $(K\mathfrak{S}_n)^\times$, donc d'un sous-groupe algébrique de $(K\mathfrak{S}_n)^\times$. On introduit le groupe algébrique

$$\tilde{G}_n(q) = \left(\prod_{\lambda \in E_n^+} SL(\lambda^h) \right) \times \left(\prod_{\lambda \in F_n} OSP(\lambda^h) \right) \times SL(\alpha^h) \times K^\times$$

Ce groupe est connexe, d'algèbre de Lie $\mathcal{L}_n \otimes K$. On a un morphisme naturel $\tilde{G}_n(q) \rightarrow G_n(q)$ de groupes algébriques, donné par

$$\left((y_\lambda)_{\lambda \in E_n^+}, (z_\lambda)_{\lambda \in F_n}, w, u \right) \mapsto (x_\lambda)$$

avec

$$x_\lambda = \begin{cases} y_\lambda & \text{si } \lambda \in E_n^+ \\ P_\lambda^{-1}((y_{\lambda'})^\#)^{-1} P_\lambda & \text{si } \lambda \in E_n^- \\ z_\lambda & \text{si } \lambda \in F_n \end{cases}$$

et $x_{\alpha_r} = (\Lambda^r w) u^{1-r}$. Il est clair que cette application est un isomorphisme de groupes algébriques, dont la réciproque est simplement donnée par

$$(x_\lambda) \mapsto \left((x_\lambda)_{\lambda \in E_n^+}, (x_\lambda)_{\lambda \in F_n}, x_\alpha, x_{[n]} \right)$$

d'où l'on déduit que $G_n(q)$ est connexe d'algèbre de Lie $\mathcal{L}_n \otimes K$. $\square$

Théorème C. Pour tout $n \geq 3$, les images des sous-groupes $\mathbf{F}_n$, $\mathbf{P}_n$ et $\mathbf{B}_n^2$ du groupe de tresses $\mathbf{B}_n$ dans $H_n(q)$ ont même enveloppe algébrique $G_n(q)$. Ce groupe algébrique est connexe, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_n^h$, et est d'indice 2 dans l'enveloppe algébrique de l'image de $\mathbf{B}_n$.

Démonstration. D'après les deux lemmes précédents, l'adhérence Zariski $\overline{\mathfrak{P}(\mathbf{F}_n)}$ de $\mathfrak{P}(\mathbf{F}_n)$ est un sous-groupe algébrique du groupe algébrique connexe $G_n(q)$. On a d'autre part

$$\mathfrak{g}_n^h \subset \text{Lie}\overline{\mathfrak{P}(\mathbf{F}_n)} \subset \text{Lie}G_n(q) = \mathcal{L}_n \otimes K.$$

En effet, $\overline{\mathfrak{P}(\mathbf{F}_n)} \subset G_n(q)$ d'après le lemme 24, et $\text{Lie}\overline{\mathfrak{P}(\mathbf{F}_n)}$ contient l'image de $\mathcal{F}_n$ par le morphisme naturel $\mathcal{T}_n \rightarrow \mathfrak{g}_n$, tensorisée par K . Comme, d'après le lemme 1, cette image est $\mathfrak{g}_n$, on a bien $\mathfrak{g}_n^h \subset \text{Lie}\overline{\mathfrak{P}(\mathbf{F}_n)}$. Enfin, $\text{Lie}G_n(q) = \mathcal{L}_n \otimes K$ découle du lemme 25.

On a donc $\text{Lie}\overline{\mathfrak{P}(\mathbf{F}_n)} = \text{Lie}G_n(q)$ puisque $\mathfrak{g}_n^h \simeq \mathcal{L}_n \otimes K$ d'après le théorème A. On déduit alors du lemme 22 et de la connexité de $G_n(q)$ que $\overline{\mathfrak{P}(\mathbf{F}_n)} = G_n(q)$, donc $\overline{\mathfrak{P}(\mathbf{F}_n)} = \overline{\mathfrak{P}(\mathbf{P}_n)} = \overline{\mathfrak{P}(\mathbf{B}_n^2)} = G_n(q)$ d'après le lemme 24.

On a $\mathbf{B}_n = \mathbf{B}_n^2 \sqcup \sigma_1 \mathbf{B}_n^2$, et $\mathfrak{P}(\sigma_1) \notin \overline{\mathfrak{P}(\mathbf{B}_n^2)}$ car pour tout $n \geq 3$ il existe $\lambda_0 \vdash n$ tel que $\lambda_0 = \lambda'_0$. En effet, si $n = 2p + 1$ est impair on peut choisir $\lambda_0 = [p + 1, p]$ et si $n = 2p$ est pair avec $p \geq 2$ on peut choisir $\lambda_0 = [p, 2, p - 2]$. On en déduit $R_{\lambda_0}(\sigma_1) \notin \text{OSP}(\lambda^h)$ d'après le tableau 1, alors que $R_{\lambda_0}(\mathbf{B}_n^2)$, projection de $\overline{\mathfrak{P}(\mathbf{B}_n^2)}$ sur $GL(\lambda_0^h)$, est incluse dans $\text{OSP}(\lambda^h)$.

Introduisant le groupe algébrique $\tilde{G}_n(q) = G_n(q) \sqcup \mathfrak{P}(\sigma_1)G_n(q)$ on en déduit que $\overline{\mathfrak{P}(\mathbf{B}_n)} = \tilde{G}_n(q) \neq G_n(q)$, et que $\overline{\mathfrak{P}(\mathbf{B}_n)}$ contient bien $G_n(q)$ comme sous-groupe connexe d'indice 2. $\square$

Références

- [A47] E. Artin, *Theory of Braids*, Ann. Math. 48 (1947), no. 1, 101–126.
- [Bour] N. Bourbaki, *Eléments de mathématique : groupes et algèbres de Lie*, Hermann, Paris, 1960-1972.
- [Ch51] C. Chevalley, *Théorie des groupes de Lie. Tome II. Groupes algébriques*, Actualités Sci. Ind. no. 1152, Hermann, Paris, 1951.
- [Dr90] V. Drinfel'd, *On quasitriangular quasi-Hopf algebras and on a group that is closely connected with $\text{Gal}(\mathbb{Q}/\mathbb{Q})$* Algebra i Analiz 2 (1990), no. 4, 149–181 ; traduction anglaise dans Leningrad Math. J. 2 (1991), no. 4, 829–860.
- [FH91] W. Fulton, J. Harris, *Representation theory. A first course*, GTM 129, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1991.
- [Ma01a] I. Marin, *Représentations linéaires des tresses infinitésimales*, Thèse de l'université Paris XI-Orsay, 2001.
- [Ma01b] I. Marin, *On KZ-systems which are irreducible under the action of the symmetric group*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. 333 (2001), no. 6, 517–522.
- [Ma03a] I. Marin, *Quotients infinitésimaux du groupe de tresses*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 53 (2003), no. 5, 1323–1364.
- [Ma03b] I. Marin, *Infinitesimal Hecke Algebras*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 337 (2003), no. 5, 297–302.
- [Ma05] I. Marin, *On the representation theory of braid groups*, prépublication arXiv:math.RT/0502118.