

SUR LES REPRÉSENTATIONS DE KRAMMER GÉNÉRIQUES

IVAN MARIN

Abstract. We define a representation of the Artin groups of type ADE by monodromy of generalized KZ-systems which is shown to be isomorphic to the generalized Krammer representation originally defined by A.M. Cohen and D. Wales, and independantly by F. Digne. It follows that all pure Artin groups of spherical type are residually torsion-free nilpotent, hence (bi-)orderable. Using that construction we show that these irreducible representations are Zariski-dense in the corresponding general linear group. It follows that all irreducible Artin groups of spherical type can be embedded as Zariski-dense subgroups of some general linear group. As group-theoretical applications we prove properties of non-decomposition in direct products for several subgroups of Artin groups, and a generalization in arbitrary types of a celebrated property of D. Long for the braid groups. We also determine the Frattini and Fitting subgroups and discuss unitarity properties of the representations.

1. INTRODUCTION

Les groupes d'Artin, ou d'Artin-Tits, sont les généralisations des groupes de tresses associés à chacun des groupes de Coxeter finis. Ils apparaissent comme espaces d'Eilenberg-MacLane de variétés algébriques complexes, quotients d'un complémentaire d'arrangement d'hyperplans (« espace de configuration ») par le groupe de Coxeter correspondant. Cela permet notamment de construire une grande partie de leurs représentations par monodromie de systèmes différentiels sur cet espace de configuration, par la déformation de représentations du groupe de Coxeter associé. Il s'agit d'une généralisation des systèmes de Knizhnik-Zamolodchikov pour le groupe de tresses classique. Les représentations des groupes d'Artin qui apparaissent de cette façon sont plus faciles à comprendre que les autres quand les questions qui se posent peuvent s'exprimer à partir du système différentiel dont elles proviennent.

Parmi les représentations du groupe de tresses classique, une représentation retient particulièrement l'attention depuis quelques années. Il s'agit d'une représentation irréductible de l'algèbre de Birman-Wenzl-Murakami, introduite en 1989, qui a été particulièrement étudiée par D. Krammer et dont il a montré en 2000, en concurrence avec S. Bigelow, qu'elle était fidèle (cf. [Kr, Bi]). Cette représentation apparaît également dans les travaux de R. Lawrence [La] en 1991, c'est pourquoi elle est parfois appelée représentation de Lawrence-Krammer. On montre facilement que ces différentes constructions donnent lieu à des représentations équivalentes. Pour des comparaisons explicites, on pourra consulter [PP, Z].

Les représentations de l'algèbre de Birman-Wenzl-Murakami font partie des représentations qui peuvent s'obtenir par monodromie. D'autre part, la représentation de Krammer et la preuve de sa fidélité a été généralisée, par Cohen et Wales [CW] en types ADE, et par Digne [D] pour tous les types cristallographiques. Comme il s'agit essentiellement de la seule représentation de ces groupes dont la fidélité soit connue, son étude présente un intérêt particulier.

Date: 15 juin 2006.

Le but de ce travail est, d'une part, de construire un système différentiel sur l'espace de configuration en types ADE, c'est-à-dire une « représentation infinitésimale » (prop. 5), dont la monodromie est la représentation de Krammer en types ADE (théorème A).

Cette construction nous permet de définir une forme quadratique infinitésimale qui explique naturellement l'apparition de structures unitaires sur la représentation de Krammer en type A, et conjecturalement en types D et E (cf. [Ma5, Ma4]).

D'autre part, elle permet de déterminer l'enveloppe algébrique des représentations de Krammer, et de déterminer la décomposition de ses puissances tensorielles. Nous montrons ici (théorème B) que le groupe d'Artin considéré est Zariski-dense dans le groupe linéaire associé à la représentation de Krammer, et qu'il en est déjà de même pour certains de ses sous-groupes.

La fidélité de cette représentation permet d'obtenir des résultats nouveaux de théorie des groupes, par exemple la résiduelle nilpotence des groupes d'Artin purs. De ce résultat de densité pour la topologie de Zariski nous déduisons de plus des conséquences sur les possibles décompositions en produit direct de sous-groupes, notamment des sous-groupes d'indice fini, des groupes d'Artin. Nous en déduisons enfin les sous-groupes de Fitting et de Frattini, et généralisons en tous types une propriété, due à D. Long, des groupes de tresses.

La section suivante présente les notations utilisées et détaille, sans les démontrer, les principaux résultats issus de ce travail. En section 3 nous définissons l'action infinitésimale, étudions ses propriétés et introduisons une forme quadratique remarquable (|). En section 4 nous démontrons que la monodromie de cette action est isomorphe à la représentation de Krammer généralisée, en section 5 nous démontrons sa Zariski-densité et présentons des applications immédiates. La section 6 développe les conséquences de ce résultats pour les groupes d'Artin-Tits sphériques irréductibles de type arbitraire. Enfin, les sections 7 et 8 contiennent une étude des différents cas A_n et D_n , qui sert notamment à déterminer le discriminant de (|).

Remerciements. Les calculs ont bénéficié des ressources du centre de calcul Médecis de l'Ecole Polytechnique. Je remercie de nombreuses personnes pour des échanges qui m'ont stimulé dans ce travail, notamment Y. de Cornulier, C. Cornut, F. Courtes, J. Crisp, F. Digne, D. Krammer, L. Paris. Je remercie en particulier Y. de Cornulier pour de précieux commentaires sur une version préliminaire, ainsi que F. Digne pour avoir rectifié les formules de [D].

2. NOTATIONS ET PRÉSENTATION DES RÉSULTATS

2.1. Groupes d'Artin et représentation de Krammer. On note W un groupe de Coxeter fini irréductible, considéré comme groupe de réflexion d'un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n , où n désigne le rang de W . On dira que W est de type ADE s'il est d'un des types A_n , D_n ou E_n , avec $n \in \{6, 7, 8\}$. Rappelons que cette condition est équivalente à la propriété que toutes les réflexions de W se trouvent dans la même classe de conjugaison. D'autre part, rappelons que le groupe de Coxeter de type $I_2(m)$ est le groupe diédral d'ordre $2m$, et que celui de type A_{n-1} est le groupe symétrique \mathfrak{S}_n .

On notera \mathcal{R} l'ensemble des réflexions de W . A chacune de ces réflexions s est associé un hyperplan $H = \text{Ker}(s - 1)$ de l'espace vectoriel \mathbb{R}^n considéré, donc à W est associé un arrangement d'hyperplans réels. Complexifiant \mathbb{R}^n en \mathbb{C}^n , on en déduit une action de W sur \mathbb{C}^n et un arrangement \mathcal{A} d'hyperplans complexes. On note X_W le complémentaire dans \mathbb{C}^n de cet arrangement d'hyperplans.

Les groupes d'Artin-Tits dits « sphériques » sont les groupes fondamentaux $B = \pi_1(X_W/W)$ associés à de tels groupes de Coxeter finis. Ils sont dits irréductibles lorsque le groupe de Coxeter correspondant l'est. Notant $P = \pi(X_W)$ le groupe d'Artin pur correspondant, on a une suite exacte naturelle

$$1 \rightarrow P \rightarrow B \xrightarrow{\pi} W \rightarrow 1$$

Lorsque W est de type A_{n-1} , le groupe B (resp. P) est le groupe des tresses (pures) à $n+1$ brins.

Supposons W défini par un système $\{s_1, \dots, s_n\}$ de réflexions simples. Par référence au diagramme de Coxeter de W , on dira que s_i est relié à s_j si les noeuds i et j du diagramme de Coxeter sont reliés à une arête : cela signifie que le sous-groupe $\langle s_i, s_j \rangle$ n'est pas de type $I_2(2)$. On peut naturellement associer à ce système de réflexions simples un système d'antécédents $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ dans B , qui sont appelés des générateurs d'Artin de B : ils engendrent B et les relations entre ces éléments se lisent sur le diagramme de Coxeter de W . Précisément, B est algébriquement défini par générateurs $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ et relations $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ si s_i et s_j ne sont pas reliées, et

$$\underbrace{\sigma_i \sigma_j \sigma_i \dots}_m = \underbrace{\sigma_j \sigma_i \sigma_j \dots}_m$$

si $\langle s_i, s_j \rangle$ est un groupe diédral de type $I_2(m)$. Le morphisme surjectif $\pi : B \rightarrow W$ de noyau P vérifie donc $\pi(\sigma_i) = s_i$ pour tout $i \in [1, n]$.

Introduisons également C_W^k , pour $k \geq 1$, le sous-groupe de P engendré par $\sigma_1^{2k}, \dots, \sigma_n^{2k}$. Un résultat de J. Crisp et L. Paris (cf. [CP]) montre que C_W^1 , donc tout C_W^k pour $k \geq 1$, est un groupe localement libre en ces générateurs, et ceci quel que soit W : notant $x_i = \sigma_i^{2k}$, cela signifie que les seules relations entre ces éléments sont $x_i x_j = x_j x_i$ si les noeuds du diagramme de Coxeter de W correspondant à i et à j ne sont pas reliés entre eux.

Soit $\mathcal{L} = \mathbb{Q}[q, q^{-1}, t, t^{-1}]$, et supposons que W est de type ADE. A la suite des travaux de Krammer, Cohen et Wales d'une part, F. Digne de l'autre, ont indépendamment construit une représentation linéaire fidèle $R_K : B \rightarrow GL_N(\mathcal{L})$, où N désigne le nombre de réflexions de W , que nous appellerons désormais représentation de Krammer. Nous ne rappellerons pas les formules qui définissent cette représentation, d'une part parce qu'elles sont compliquées et peu éclairantes, d'autre part parce que nous ne les utiliserons pas ici. Nous renvoyons à [CGW] pour cette description : nos paramètres sont reliés aux paramètres r et l de [CGW] par $r = q^{-1}$ et $t = l^{-1}$.

2.2. Algèbre d'holonomie et représentations de monodromie. Une manière désormais classique d'obtenir des représentations des groupes d'Artin consiste à étudier des représentations de l'algèbre de Lie d'holonomie de l'arrangement d'hyperplans \mathcal{A} , telle que définie et étudiée par Kohno, notamment dans [Ko]. Les exemples en type A sont légion. En dehors du type A, on pourra par exemple consulter [Ch, BMR, MT].

Fixant un corps \mathbb{k} de caractéristique 0, cette algèbre de Lie \mathfrak{g} définie sur \mathbb{k} est présentée par une famille de générateurs $t_s, s \in \mathcal{R}$, soumise aux relations $[t_s, t_Z] = 0$ où

- $Z \subset \mathbb{C}^n$ parcourt les sous-espaces de codimension 2 intersections d'éléments de \mathcal{A}
- s parcourt les éléments de \mathcal{R} tels que $s|_Z = \text{Id}_Z$
- t_Z désigne la somme des t_u pour $u|_Z = \text{Id}_Z$.

Pour tout $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$ on notera $\mathfrak{g}_{\mathcal{S}}$ la sous-algèbre de Lie de \mathfrak{g} engendrée par les éléments $t_s, s \in \mathcal{S}$.

Notons $\mathcal{M} = \mathbb{k}[[h]]$ l'anneau des séries formelles en une indéterminée sur \mathbb{k} et $\mathbb{K} = \mathbb{k}((h))$ son corps des fractions. On note alors $\mathfrak{g}^h = \mathfrak{g} \otimes \mathcal{M}$.

A tout $s \in \mathbb{R}$, on associe une forme linéaire α_s sur \mathbb{C}^n de noyau $\text{Ker}(s - 1)$. La 1-forme différentielle $d \log \alpha_s = \frac{d\alpha_s}{\alpha_s}$ ne dépend pas de la forme particulière choisie, et les relations de \mathfrak{g} impliquent que la 1-forme, à valeur dans \mathfrak{g}^h ,

$$\omega = h \sum_{s \in \mathcal{R}} t_s d \log \alpha_s \in \Omega^1(X_W) \otimes \mathfrak{g}^h$$

En conséquence, si $\mathbb{k} = \mathbb{C}$, toute représentation $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$, où V est un \mathbb{k} -espace vectoriel, donne lieu par monodromie à une représentation de P sur $V^h = V \otimes \mathcal{M}$. Une telle représentation ne dépend pas du point-base choisi à isomorphisme près. De plus, si V est muni d'une action de W telle que

$$\forall s \in \mathcal{R} \quad \forall w \in W \quad w\rho(t_s)w^{-1} = \rho(t_{ws w^{-1}})$$

on dira que ρ est équivariante. En d'autres termes, elle s'étend en une représentation de $\mathfrak{B} = \mathbb{k}W \ltimes \mathfrak{U}\mathfrak{g}$, où $\mathfrak{U}\mathfrak{g}$ désigne l'algèbre enveloppante universelle de \mathfrak{g} . La représentation de monodromie s'étend alors en une représentation $S : B \rightarrow GL(V^h)$. Les propriétés des représentations construites de cette façon qui nous seront utiles sont les suivantes :

- (1) Si σ est un générateur d'Artin et $s = \pi(\sigma)$, alors $S(\sigma)$ est conjugué à $s \exp(i\pi h \rho(t_s))$.
- (2) Si ρ est (absolument) irréductible, alors S est (absolument) irréductible

La première de ces propriétés est classique ; pour la deuxième on pourra consulter [Ma5].

2.3. Résultats sur la représentation de Krammer. En section 3 nous construisons, pour tout groupe de Coxeter W irréductible fini de type ADE et tout $m \in \mathbb{k}$, une représentation de \mathfrak{g} dans le sous-espace vectoriel de base \mathcal{R} , que nous appelons représentation de Krammer infinitésimale. Cette représentation est compatible avec l'action naturelle par conjugaison de W sur \mathcal{R} , et permet donc de construire par monodromie, si $\mathbb{k} = \mathbb{C}$, une représentation $R : B \rightarrow GL_N(\mathcal{M}) \subset GL_N(K)$.

Un plongement de \mathcal{L} dans $\mathcal{M} = \mathbb{k}[[h]]$, donc dans $\mathbb{K} = \mathbb{k}((h))$, est défini par la donnée des images de q et t , qui doivent être inversibles et algébriquement indépendantes. C'est le cas notamment si $q = e^h$ et $t = e^{mh}$ pour $m \notin \mathbb{Q}$.

Les formules définissant cette « représentation de Krammer infinitésimale » sont nettement plus simples que les descriptions connues de la représentation de Krammer dans le cas général. Nous montrons en section 4 (théorème A) que, si N désigne le nombre de réflexions de W ,

Théorème 1. *Pour tout W de type ADE et $m \notin \mathbb{Q}$, la représentation de Krammer $R_{\mathbb{K}}$ plongée dans $GL_N(\mathbb{K})$ par $q = e^h$ et $t = e^{mh}$ est isomorphe à R .*

Nous montrons en section 3 que ρ , donc R , est irréductible. Nous montrons également que $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_N(\mathbb{k})$ est surjective, et même que $\rho(\mathfrak{g}_{\mathcal{S}}) = \mathfrak{gl}_N(\mathbb{k})$ pour \mathcal{S} composé des racines simples de W . Une conséquence (section 5.1, théorème B) est que

Théorème 2. *Pour tout W de type ADE et $m \notin \mathbb{Q}$, la représentation de Krammer $R_{\mathbb{K}}$ plongée dans $GL_N(\mathbb{K})$ par $q = e^h$ et $t = e^{mh}$ est d'image Zariski-dense.*

2.4. Conséquences sur les groupes d'Artin-Tits. Une conséquence du premier théorème est le fait que P se plonge, pour tout W de type ADE , dans

$$GL_N^0(\mathbb{K}) = 1 + hM_N(\mathcal{M}) \subset GL_N(\mathbb{K})$$

qui est un groupe résiduellement nilpotent-sans-torsion. Comme tous les groupes d'Artin-Tits sphériques peuvent se plonger dans un groupe de type ADE d'après [Cr], on en déduit immédiatement (corollaire du théorème A)

Théorème 3. *Tout groupe d'Artin-Tits sphérique pur est résiduellement nilpotent-sans-torsion, et en particulier biordonnable.*

La résiduelle nilpotence-sans-torsion avait déjà été obtenue en types A, B (et $I_2(m)$) par Falk et Randell [FR] et ultérieurement en type D par Leibman et Markushevich [LM]. Remarquons qu'en posant artificiellement $q = e^h$ et $t = e^{\sqrt{2}h}$ dans les formules de la représentation de Krammer, il est possible d'obtenir directement, mais de façon un peu magique, ce résultat. Nous renvoyons à [Ma7] où nous avons utilisé cette méthode. Le fait que tout groupe résiduellement nilpotent-sans-torsion est biordonnable est démontré par exemple dans [Pas].

Une conséquence du deuxième théorème est que tout groupe d'Artin-Tits sphérique irréductible de type ADE est sous-groupe Zariski-dense d'un groupe linéaire. Il en est donc de même pour les groupes de type B_n , qui s'identifient à des sous-groupes d'indice fini de groupes de type A_n . Un résultat analogue s'obtient facilement pour les groupes diédraux, qui se plongent dans $GL_2(K)$ d'après un résultat de G. Lehrer et N. Xi [LX]. Le cas des groupes exceptionnels F_4, H_3, H_4 nécessite un peu plus de travail, pour compléter la démonstration (section 6) du

Théorème 4. *Pour tout groupe d'Artin-Tits sphérique irréductible G , il existe $N \in \mathbb{N}$ et un corps K tel que*

- (1) B s'identifie à un sous-groupe Zariski-dense de $GL_N(K)$
- (2) Les sous-groupes C_W^k sont également Zariski-denses.

Soulignons que ce résultat n'était pas connu pour le groupe de tresses « classique ».

2.5. Conséquences de la Zariski-densité. Le théorème 4 a plusieurs conséquences remarquables de type « théorie des groupes » sur les groupes d'Artin-Tits sphériques irréductibles. Rappelons tout d'abord que, si B est un tel groupe, son centre Z est cyclique infini.

En premier lieu, cela permet de retrouver facilement un résultat de L. Paris.

Théorème 5a. (*L. Paris, [Par]*) *Soit B un groupe d'Artin-Tits irréductible, et Z son centre. Si $B = U \times V$ est une décomposition de B en produit direct, alors $U \subset Z$ ou $V \subset Z$.*

De plus, cette nouvelle démonstration (section 6.2) montre que de nombreux autres groupes ont cette propriété, par exemple les sous-groupes d'indice fini de B .

Théorème 5b. *Soit B un groupe d'Artin-Tits sphérique irréductible, et G un sous-groupe d'indice fini de B . Si $G = U \times V$ est une décomposition de G en produit direct, alors $U \subset Z$ ou $V \subset Z$.*

Plus généralement, on en déduit une généralisation à tous les groupes d'Artin-Tits d'un théorème fameux de D. Long sur le groupe de tresses. Dans [Lo], il est en effet démontré à l'aide de la classification de Nielsen-Thurston des difféomorphismes que les sous-groupes sous-normaux Q des groupes G qui sont des mapping class groups ou des groupes de tresses vérifient la propriété suivante, où l'on a noté Z le centre de G .

- (L) Si H_1, H_2 sont deux sous-groupes distingués propres de Q non inclus dans Z , alors $H_1 \cap H_2$ n'est pas inclus dans Z .

Cette propriété a des conséquences importantes en théorie des représentations, déjà pour $Q = G$. Elle implique notamment que

- (1) on ne peut essentiellement pas construire de représentation linéaire fidèle par somme directe de représentations non fidèles

- (2) pour vérifier qu'une représentation d'un groupe de tresses est fidèle, il suffit de vérifier la fidélité sur le centre et le sous-groupe libre naturel.

Une conséquence du théorème 4 est que cette propriété se généralise à tous les sous-groupes d'indice fini des groupes d'Artin-Tits sphériques

Théorème 6. *Soit B un groupe d'Artin-Tits sphérique irréductible, et G un sous-groupe d'indice fini de B . Alors tous les sous-groupes sous-normaux de G vérifient (L).*

Plus précisément, nous étudions en section 6.3 les propriétés des groupes sans torsion, appelés ici « fortement linéaires », qui se plongent dans un groupe linéaire $GL_N(K)$, pour un certain corps K et un certain entier N , de telle façon que leur adhérence pour la topologie de Zariski contienne $SL_N(K)$. Les groupes d'Artin-Tits sphériques irréductibles en font partie d'après le théorème 4, ainsi que leurs sous-groupes d'indice fini, soit par des arguments généraux (prop. 15), soit parce qu'ils contiennent les sous-groupes C_W^k pour k assez grand. Le théorème 6 découle alors d'une propriété générale de ces groupes fortement linéaires (théorème C, section 6.3).

En particulier, ce théorème montre que, pour déterminer la fidélité d'une représentation d'un groupe d'Artin-Tits sphérique irréductible B , il suffit de vérifier la fidélité de sa restriction au centre et à n'importe lequel de ses sous-groupes sous-normaux. Or, tous ces groupes sauf peut-être un nombre fini d'entre eux (correspondant aux types exceptionnels) admettent un sous-groupe sous-normal qui est libre, donc auquel des méthodes de ping-pong sont susceptibles de s'appliquer.

En effet, on a un morphisme surjectif $\pi : B \rightarrow W$ vers le groupe de Coxeter correspondant, et $P = \text{Ker}\pi$ s'identifie à $\pi_1(X)$, pour X le complémentaire d'un certain arrangement d'hyperplans. En types A, B et $I_2(m)$ cet arrangement est super-résoluble ou encore « fiber-type », suivant la terminologie de [OT], donc il existe une fibration $X \rightarrow Y$, de fibre $\mathbb{C} \setminus \{m \text{ points}\}$ et dont l'espace de base est de π_2 nul. Cela induit un plongement $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{m \text{ points}\}) \hookrightarrow \pi_1(X)$ comme sous-groupe normal, donc comme sous-groupe sous-normal de B . En type D il existe également une telle fibration, due à Brieskorn, introduite dans [Br] et particulièrement étudiée par Markusevitch et Leibman dans [LM]. Les seuls cas dans lesquels l'existence d'un tel sous-groupe sous-normal libre reste à notre connaissance ouverte sont donc les types exceptionnels $H_3, H_4, F_4, E_6, E_7, E_8$.

Enfin, ces résultats permettent d'obtenir facilement les sous-groupes de Fitting $\text{Fit}(G)$ et de Frattini $\Phi(G)$ de ces groupes. En type A , le groupe $\Phi(B)$ a été déterminé par Long dans [Lo].

Théorème 7. *Soit Q un sous-groupe sous-normal d'un groupe d'Artin-Tits sphérique irréductible B . Alors $\text{Fit}(Q) = Z(Q)$ et, si Q est finiment engendré, alors $\Phi(Q) = \{e\}$. En particulier, $\Phi(B) = \{e\}$.*

Démonstration. Le fait que $\text{Fit}(Q) = Z(Q)$ découle du théorème C et de son deuxième corollaire. Supposons Q finiment engendré. D'après le corollaire 3 du théorème C on a $\Phi(Q) \subset Z(Q) \subset Z(B)$. Soit $\ell : B \rightarrow \mathbb{Z}$ le morphisme longueur associé aux générateurs d'Artin, et $\check{\ell} : Q \rightarrow \mathbb{Z}$ sa restriction à Q . Si $\check{\ell}(Q) = \{0\}$, alors $\Phi(Q) \subset \text{Ker}\ell$ d'où $\Phi(Q) = \{e\}$ car $Z(B)$ est engendré par un élément de longueur non nulle. Sinon $\check{\ell}(Q) = m\mathbb{Z}$ avec $m \in \mathbb{N}^*$. Or, pour tout nombre premier p ne divisant pas m , le sous-groupe $\check{\ell}^{-1}(pm\mathbb{Z})$ est maximal dans Q donc $\Phi(Q) \subset \check{\ell}^{-1}(pm\mathbb{Z})$. Comme $m\mathbb{Z}$ est monogène $\check{\ell}^{-1}(pm\mathbb{Z})$ est maximal dans Q donc $\Phi(Q) \subset \text{Ker}\ell$ et on conclut comme précédemment. \square

2.6. Discussions sur l'unitarité. Un dernier aspect de cette approche infinitésimale de la représentation de Krammer concerne la présence d'une forme quadratique, simple à définir et naturelle, qui est « invariante » par l'action infinitésimale en type *ADE*. De telles formes conduisent à l'existence de formes unitaires invariantes sur la représentation de Krammer générique par des méthodes de monodromie algébrique, développées dans [Dr, En, Ma4] en types *A*, *B*, et $I_2(m)$. De telles méthodes n'ont pas encore été développées en type *D* et *E*, donc cela ne permet pour l'instant que de démontrer l'unitarisabilité *a priori* (prop. 11) de la représentation de Krammer en type *A*, explicitée par R. Budney dans [Bu] par de toutes autres méthodes. Néanmoins, il nous a semblé utile de décrire explicitement cette forme quadratique, très vraisemblablement à l'origine de formes unitaires invariantes, pour les différents types. Notamment, nous déterminons les facteurs irréductibles de son discriminant.

3. REPRÉSENTATIONS DE KRAMMER INFINITÉSIMALES

3.1. Définitions des opérateurs τ_s . On note $a \bullet b = aba^{-1}$ et on fixe un corps \mathbb{k} de caractéristique 0. Soit W un groupe de Coxeter irréductible fini de type *ADE* de rang n , identifié à un sous-groupe de réflexions de \mathbb{C}^n , \mathcal{R} l'ensemble de ses réflexions et \mathfrak{g} l'algèbre de Lie d'holonomie associée.

Soit V un \mathbb{k} -espace vectoriel de base $\{v_s, s \in \mathcal{R}\}$, muni de l'action de W définie par $w.v_s = v_{w\bullet s}$. Le vecteur \mathbf{v} égal à la somme des v_s pour $s \in \mathcal{R}$ est W -invariant, et engendre V^W parce que toutes les réflexions sont conjuguées dans W .

On va définir, pour tout $m \in \mathbb{k}$, une famille d'éléments $\tau_s \in \text{End}(V)$ pour $s \in \mathcal{R}$, dont on montrera ensuite qu'ils permettent de définir une représentation équivariante de \mathfrak{g} .

Définition 1. Pour tout $s \in \mathcal{R}$ on note $\tau_s \in \text{End}(V)$ l'endomorphisme défini par

$$\tau_s.v_u = \begin{cases} v_{s\bullet u} - v_s & \text{si } su \neq us \\ v_u & \text{si } su = us, u \neq s \\ mv_s & \text{si } u = s \end{cases}$$

On identifie $w \in W$ à son action naturelle sur V .

Lemme 1. Pour tous $s \in \mathcal{R}$, $w \in W$, on a $w\tau_s w^{-1} = \tau_{w\bullet s}$

Démonstration. On note $\delta_{u,s}$ le symbole de Kronecker, i.e. $\delta_{u,s} = 1$ si $u = s$, 0 sinon, et $\delta'_{u,s} = 1$ si $u \neq s$ et $us = su$, 0 sinon. Soit $u \in \mathcal{R}$. On remarque $\tau_s.v_u = v_{s\bullet u} - v_s + m\delta_{u,s}v_s + \delta'_{u,s}v_s$. On a

$$\begin{aligned} w\tau_s w^{-1}.v_u &= w\tau_s.v_{w^{-1}\bullet u} \\ &= w(v_{sw^{-1}\bullet u} - v_s + m\delta_{s,w^{-1}\bullet u}v_s + \delta'_{s,w^{-1}\bullet u}v_s) \\ &= v_{ws w^{-1}\bullet u} - v_{w\bullet s} + m\delta_{s,w^{-1}\bullet u}v_{w\bullet s} + \delta'_{s,w^{-1}\bullet u}v_{w\bullet s} \\ &= v_{(w\bullet s)\bullet u} - v_{w\bullet s} + m\delta_{w\bullet s,u}v_{w\bullet s} + \delta'_{w\bullet s,u}v_{w\bullet s} \\ &= \tau_{w\bullet s}.v_u \end{aligned}$$

□

Remarquons que, identifiant toujours $s \in \mathcal{R}$ à son action naturelle sur V , on a $\tau_s = s - p_s$ avec

$$p_s.v_u = \begin{cases} v_s & \text{si } su \neq us \\ 0 & \text{si } su = us, u \neq s \\ (1-m)v_s & \text{si } u = s \end{cases}$$

On en déduit $wp_s w^{-1} = p_{w\bullet s}$.

En particulier, s et p_s commutent et on a $p_s^2 = (1-m)p_s$. On vérifie facilement $sp_s = p_s s = p_s$ pour tout $s \in \mathcal{R}$ donc $p_s \tau_s = \tau_s p_s = m p_s$. On en déduit

$$\tau_s^3 - \tau_s - m\tau_s^2 + m = 0, \quad s = \frac{-1}{m+1}\tau_s^2 + \tau_s + \frac{1}{m+1} \text{ si } m \neq -1$$

et donc les spectres comparés de τ_s et s sont

τ_s	1	-1	m
s	1	-1	1

3.2. Une forme quadratique invariante. Introduisons la forme bilinéaire symétrique telle que $(v_r|v_s) = m-1$ si $r = s$, $(v_r|v_s) = -1$ si $rs \neq sr$ et $(v_r|v_s) = 0$ sinon. Il est clair qu'elle est invariante pour l'action de W .

Proposition 1. *Lorsque $(|)$ est non dégénérée et $m \neq 1$, pour tout $s \in \mathcal{R}$, $\frac{1}{1-m}p_s$ est le projecteur orthogonal sur $\mathbb{k}v_s$ par rapport à cette forme et τ_s est autoadjoint. Enfin, $(|)$ est non dégénérée pour des valeurs génériques de m et, si $\mathbb{k} \subset \mathbb{R}$, c'est un produit scalaire pour m assez grand.*

Démonstration. Comme chaque réflexion est à la fois orthogonale par rapport à $(|)$ et involutive, on en déduit que r est autoadjoint pour tout $r \in \mathcal{R}$. Comme on a $p_r^2 = (1-m)p_r$ et $\text{Imp}_r = \mathbb{k}v_r$, il suffit de montrer que p_r est autoadjoint pour avoir la première partie de l'énoncé. On a $p_r(v_s) = -(v_r|v_s)v_r$ d'où $(p_r(v_s)|v_{s'}) = -(v_r|v_s)(v_r|v_{s'}) = (v_s|p_r(v_{s'}))$ et p_r est bien autoadjoint. Le déterminant de la matrice définissant $(|)$ dans la base naturelle est un polynôme unitaire non constant en m , donc cette forme quadratique est bien non dégénérée pour m générique, et si $\mathbb{k} \subset \mathbb{R}$ ses mineurs principaux sont également des polynômes unitaires non constant en m , donc sont strictement positifs si m est suffisamment grand. On en déduit d'après le critère de Sylvester que, pour m suffisamment grand, $(|)$ est un produit scalaire. \square

Quand m n'est pas générique, on peut dire a priori la chose suivante. Par abus de langage, on appellera discriminant de $(|)$ le déterminant de sa matrice dans la base formée des $v_s, s \in \mathcal{R}$ pour un ordre donné sur \mathcal{R} . Il s'agit donc d'un polynôme unitaire en m à coefficients rationnels de degré $\#\mathcal{R}$.

Pour tout $s \in \mathcal{R}$, introduisons les nombres

$$\begin{aligned} c(W) &= \#\{s' \in \mathcal{R} \setminus \{s\} \mid s's = ss'\} \\ c'(W) &= \#\{s' \in \mathcal{R} \mid s's \neq ss'\} \end{aligned}$$

qui ne dépendent pas du choix de s puisque toutes les réflexions sont conjuguées entre elles, et notons $V_1 \oplus \dots \oplus V_r$ une décomposition en irréductibles de V en tant que W -module, avec $\dim V_i \leq \dim V_{i+1}$. On constate par examen de chacune des séries que cette décomposition est sans multiplicités, c'est-à-dire $V_i \not\cong V_j$ pour $i \neq j$. D'autre part, comme W est de type ADE, toutes ces représentations sont absolument irréductibles et définies sur \mathbb{Q} . Ainsi $(|)$ appartient au carré symétrique de V^* en tant que W -module, est W -invariant et sa dépendance en m est affine. Comme V est autodual en tant que W -module, on peut identifier canoniquement $(|)$ à un élément, dépendant affinement de m , de $\bigoplus_{i=1}^r \text{End}_W(V_i) \simeq \mathbb{k}^r$ et son discriminant se décompose comme produit de r facteurs de la forme $Q_i(m)^{\dim V_i}$, avec Q_i polynôme de degré 1 en m . On peut d'autre part supposer que V_1 est la représentation triviale, engendrée par la somme \mathbf{v} des v_s pour $s \in \mathcal{R}$. On a $(\mathbf{v}|\mathbf{v}) = (\#\mathcal{R})(m - \#\mathcal{R} + c(W))$, donc $m - \#\mathcal{R} + c(W)$ apparaît comme facteur irréductible du discriminant de $(|)$. Enfin, $V \simeq V^*$ en tant que W -module, donc $V^* \otimes V^*$ s'identifie à la représentation de permutation naturelle sur $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$.

Type	Discriminant	Déf. > 0 ssi
E_6	$(m-21)(m-3)^{20}(m+3)^{15}$	$m > 21$
E_7	$(m-33)(m-5)^{27}(m+3)^{35}$	$m > 33$
E_8	$(m-57)(m-9)^{35}(m+3)^{84}$	$m > 57$

TAB. 1. Discriminant de (\mid) en type E.

Comme cette action comprend au moins trois parties stables symétriques $\{(v_s, v_s) \mid s \in \mathcal{R}\}$, $\{(v_s, v_u) \mid \langle s, u \rangle \simeq I_2(3)\}$ et $\{(v_s, v_u) \mid \langle s, u \rangle \simeq I_2(2)\}$, toutes non vides si $n \geq 3$, on en déduit $r \geq 3$ si $n \geq 3$. On peut vérifier au cas par cas que $r = 2$ pour $n = 2$, $r = 3$ pour W de type A_n avec $n \geq 3$ et W de type E_6, E_7, E_8 , $r = 4$ pour W de type D_n avec $n \geq 5$ et $r = 5$ pour W de type D_4 , et déduire la valeur du discriminant de cette décomposition explicite. Nous obtenons plus loin la valeur du discriminant pour chacun de ces types par une méthode alternative, qui permet de plus de décrire la restriction de V à des sous-algèbres de Lie remarquables de \mathfrak{g} . Une fois les facteurs Q_i obtenus, une condition nécessaire et suffisante de définie positivité pour $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ est alors donnée par $Q_i(m) > 0$ pour tout $1 \leq i \leq r$. Nous verrons type par type que cette condition s'exprime de la façon suivante.

Proposition 2. *Si $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, la forme (\mid) est définie positive si et seulement si $m > \#\mathcal{R} - c(W)$.*

Cela découlera des propositions 16 et 17 pour les types classiques. Pour les types E , cela découle d'un calcul explicite (cf. table 1).

3.3. Restriction aux sous-espaces E_X . Soit X une intersection d'hyperplans de réflexion de codimension 2. On note

$$\mathcal{R}_X = \{g \in \mathcal{R} \mid \forall x \in X \ g(x) = x\}, \quad W_X = \{g \in W \mid \forall x \in X \ g(x) = x\}, \quad \tau_X = \sum_{g \in \mathcal{R}_X} \tau_g,$$

et E_X le sous-espace de V engendré par les v_s pour $s \in \mathcal{R}_X$. C'est un sous-espace stable de V pour l'action de W_X , mais également des τ_s, p_s pour $s \in \mathcal{R}_X$. L'ensemble \mathcal{R}_X est l'ensemble des réflexions du sous-groupe parabolique W_X de W , lequel est de type $I_2(2)$ ou $I_2(3)$ car W est de type ADE. Plus précisément, tout couple (s_1, s_2) de réflexions distinctes engendre un tel sous-groupe W_X , de type $I_2(2)$ si $s_1 s_2 = s_2 s_1$, de type $I_2(3)$ sinon.

3.3.1. Si W_X est de type $I_2(2)$. Notons $\mathcal{R}_X = \{s_1, s_2\}$, avec $s_1 s_2 = s_2 s_1$, et prenons (v_{s_1}, v_{s_2}) pour base de E_X . Dans cette base,

$$\tau_{s_1} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau_{s_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix},$$

donc $\tau_X = (m+1)\text{Id}$ et $[\tau_{s_1}, \tau_X] = [\tau_{s_2}, \tau_X] = 0$.

3.3.2. Si W_X est de type $I_2(3)$. Notons $\mathcal{R}_X = \{s_1, s_2, s_3\}$ et prenons $(v_{s_1}, v_{s_2}, v_{s_3})$ pour base de E_X . Dans cette base,

$$\tau_{s_1} = \begin{pmatrix} m & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_{s_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & m & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_{s_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & m \end{pmatrix}$$

donc $\tau_X = m\text{Id}$ et $[\tau_{s_1}, \tau_X] = [\tau_{s_2}, \tau_X] = [\tau_{s_3}, \tau_X] = 0$.

W	A_{n-1}	D_n	E_6	E_7	E_8
$\#\mathcal{R}$	$\frac{n(n-1)}{2}$	$n(n-1)$	36	63	120
$c(W)$	$\frac{(n-2)(n-3)}{2}$	$n^2 - 5n + 7$	15	30	63

TAB. 2. Dénombrement des groupes de Coxeter de type ADE

3.4. Action du centre et irréductibilité. Soit τ la somme des τ_s pour $s \in \mathcal{R}$. On a

$$\tau.v_s = \tau_s.v_s + \sum_{s' \neq ss'} \tau_{s'}.v_s + \sum_{\substack{s \neq s' \\ s's = ss'}} \tau_{s'}.v_s = mv_s + \left(\sum_{s' \neq s's} v_{s' \bullet s} - v_{s'} \right) + c(W)v_s$$

où l'on rappelle que $c(W) = \#\{s' \in \mathcal{R} \setminus \{s\} \mid s's = ss'\}$ ne dépend pas de s puisque toutes les réflexions sont conjuguées entre elles. De plus,

$$\sum_{s' \neq s's} v_{s' \bullet s} - v_{s'} = 0$$

pour la même raison. On en déduit que τ est un scalaire, qui vaut $m + c(W)$. Le nombre de réflexions et $c(W)$ sont donnés par la table 2.

Soit maintenant $\mathbf{v} \in V$ la somme des v_s pour $s \in \mathcal{R}$. Il est clairement invariant par l'action de W , et même engendre linéairement l'espace des vecteurs de V invariants par W . Pour tout $s \in \mathcal{R}$,

$$\tau_s.\mathbf{v} = \tau_s.v_s + \sum_{ss' \neq s's} \tau_s.v_{s'} + \sum_{\substack{s \neq s' \\ ss' = s's}} \tau_s.v_{s'} = mv_s + \left(\sum_{s' \neq s's} v_{s \bullet s'} - v_s \right) + \sum_{\substack{s \neq s' \\ ss' = s's}} v_{s \bullet s'}$$

soit $\tau_s.\mathbf{v} = (m-1)v_s + s.\mathbf{v} - c'(W)v_s = (m-1-c'(W))v_s + \mathbf{v}$ avec $c'(W) = \#\{s' \in \mathcal{R} \mid s's \neq ss'\}$, soit $c(W) + c'(W) + 1 = \#\mathcal{R}$.

On en déduit

Proposition 3. *Si V est semi-simple sous l'action des τ_s , $s \in \mathcal{R}$, et $m \notin \{\#\mathcal{R} - c(W), -1\}$, alors V est absolument irréductible pour cette action.*

Démonstration. Il suffit de montrer que V est irréductible pour \mathbb{k} algébriquement clos. Comme $m \neq -1$, l'action de $s \in \mathcal{R}$ est un polynôme de celle de τ_s , donc les sous-espaces stables pour l'action des τ_s sont stables pour l'action de W puisque \mathcal{R} engendre W . Comme l'espace des vecteurs W -invariants de V est de dimension 1, il existe $U \subset V$ irréductible sous l'action des τ_s , $s \in \mathcal{R}$, tel que $\mathbf{v} \in U$. Mais alors $\tau_s.\mathbf{v} - \mathbf{v} = (m - \#\mathcal{R} + c(W))v_s$ donc $v_s \in U$ pour tout $s \in \mathcal{R}$, d'où $U = V$ et V est irréductible. \square

En particulier, pour m générique, V est irréductible d'après la proposition 1. Une légère variante de la preuve précédente permet de démontrer un résultat d'irréductibilité de V sous l'action des τ_s pour s parcourant certaines parties \mathcal{S} de \mathcal{R} .

Proposition 4. *Soit $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$ engendrant W . Si V est semi-simple sous l'action des τ_s , $s \in \mathcal{S}$, et $m \notin \{\#\mathcal{R} - c(W), -1\}$, alors V est absolument irréductible sous cette action.*

Démonstration. Comme précédemment, on suppose \mathbb{k} algébriquement clos. Les sous-espaces stables pour l'action des τ_s , $s \in \mathcal{S}$ sont encore stables pour l'action de W puisque \mathcal{S} engendre

<i>Type</i>	$A_r, r \geq 1$	$B_r, r \geq 2$	$C_r, r \geq 3$	$D_r, r \geq 4$	E_6	E_7	E_8	F_4	G_2
<i>Dimension</i>	$r + 1$	$2r + 1$	$2r$	$2r$	27	56	248	26	7

TAB. 3. Dimensions des plus petites représentations irréductibles

W . Comme l'espace des vecteurs W -invariants de V est de dimension 1, il existe $U \subset V$ irréductible sous l'action des $\tau_s, s \in \mathcal{S}$, tel que $\mathbf{v} \in U$. Soit $s \in \mathcal{S} \neq \emptyset$. On a $\tau_s \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} = (m - \#\mathcal{R} + c(W))v_s$ donc $v_s \in U$, et il en est de même de tout $w.v_s = v_{ws w^{-1}}$ pour $w \in W$ puisque U est W -stable. Comme W agit transitivement sur \mathcal{R} on en déduit $U = V$ et V est irréductible. \square

3.5. Représentation de Krammer infinitésimale. Soit $\mathfrak{B} = \mathbb{k}W \rtimes \mathfrak{U}\mathfrak{g}$, où $\mathfrak{U}\mathfrak{g}$ désigne l'algèbre enveloppante universelle de \mathfrak{g} . On dit qu'une représentation ρ de \mathfrak{B} est *infinitésimalement unitaire* par rapport à une forme quadratique si $\rho(w)$ est orthogonal pour tout $w \in W$ et $\rho(t_s)$ est autoadjoint pour tout $s \in \mathcal{R}$.

Proposition 5. *L'application $t_s \mapsto \tau_s$ étend le W -module V en une représentation ρ de \mathfrak{B} . Elle est infinitésimalement unitaire par rapport à (\mid) et absolument irréductible pour m générique. De plus, la somme T des t_s pour $s \in \mathcal{R}$ agit par $m + c(W)$.*

Démonstration. D'après ce qui précède, il reste à vérifier les relations $[\tau_s, \tau_X] = 0$ pour tout X de codimension 2 et $s \in \mathcal{R}_X$. Comme cette condition est polynomiale en m , il suffit de la vérifier pour m générique, et on peut donc supposer que (\mid) est non dégénérée d'après la proposition 1. Notons $s_X = \sum_{s \in \mathcal{R}_X} s$. L'espace E_X est stable par W_X et les τ_s, p_s pour $s \in \mathcal{R}_X$, donc il en est de même de son orthogonal E_X^\perp par rapport à (\mid) . Comme $wp_s = p_{w \bullet s} w$ et, pour $s \in W_X$, p_s est un projecteur orthogonal sur $v_s \in E_X$, on déduit de $t_r = r - p_r$ que $[\tau_s, \tau_X] - [s, s_X]$ s'annule sur E_X^\perp , donc que $[\tau_s, \tau_X]$ s'annule sur E_X^\perp puisque $ss_X s = s_X$. Il suffit donc de montrer que $[\tau_s, \tau_X]$ s'annule sur E_X , ce qui a déjà été fait. L'absolue irréductibilité découle de la proposition 3. \square

3.6. Image de \mathfrak{g} dans $\mathfrak{gl}(V)$. Nous allons montrer que le morphisme $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ est surjectif. Pour ce faire, nous établissons d'abord la proposition générale suivante.

Proposition 6. *Soit V un \mathbb{k} -espace vectoriel de dimension finie, et \mathfrak{a} une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{sl}(V)$ agissant de façon absolument irréductible sur V . Si $\text{rg}(\mathfrak{a}) > \frac{1}{2} \dim V$, alors $\mathfrak{a} = \mathfrak{sl}(V)$.*

Démonstration. On peut supposer $\mathbb{k} = \mathbb{C}$. Si \mathfrak{a} est simple, ce résultat découle de la classification des algèbres de Lie simples complexes et de leur plus petite représentation irréductible (cf. table 3). Il reste donc à démontrer que, sous ces hypothèses, \mathfrak{a} est simple. Comme \mathfrak{a} est réductif et l'algèbre dérivée \mathfrak{a}' vérifie les mêmes hypothèses et $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{sl}(V)$ on peut supposer que \mathfrak{a} est semi-simple. Décomposons $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \times \dots \times \mathfrak{a}_p$ suivant ses facteurs simples. On a $p \geq 1$ et on veut montrer $p = 1$. Soient r_i les rangs des facteurs simples \mathfrak{a}_i . Comme V est irréductible elle s'écrit $V = V_1 \otimes \dots \otimes V_p$ avec V_i représentation irréductible fidèle de \mathfrak{a}_i . En particulier, on a $v_i = \dim V_i \geq r_i + 1$. Notons $v = \dim V$, $r = \text{rg}(\mathfrak{a})$. On a $v = v_1 \dots v_p \geq (r_1 + 1) \dots (r_p + 1)$ et $r > v/2$ par hypothèse d'où $r = r_1 + \dots + r_p > \frac{1}{2}(r_1 + 1) \dots (r_p + 1)$. Si $p \geq 3$,

$$(r_1 + 1) \dots (r_p + 1) \geq 1 + (r_1 + \dots + r_p) + r_1 r_2 + r_2 r_3 + \dots + r_{p-1} r_p + r_p r_1 \geq 1 + 2r > 2r$$

ce qui contredit l'hypothèse. Il reste donc à exclure le cas $p = 2$. Notons alors $a = r_1$, $b = r_2$. On doit avoir $2(a + b) > (1 + a)(1 + b)$ soit $ab < a + b - 1$. Or $ab \geq a + b - 1$ pour tous

a, b entiers naturels non nuls : supposant $a \leq b$, c'est clair si $a = 1$ et sinon $a \geq 2$ donc $ab \geq 2b \geq a + b > a + b - 1$. On en déduit $p = 1$ et la conclusion. \square

Pour $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$ on rappelle que $\mathfrak{g}_{\mathcal{S}}$ est définie comme la sous-algèbre de Lie de \mathfrak{g} engendrée par les t_s pour $s \in \mathcal{S}$.

Proposition 7. *Pour des valeurs génériques de m , l'application $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ est surjective. Il en est déjà de même de l'application $\mathfrak{g}_{\mathcal{R}_0} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ où \mathcal{R}_0 correspond aux racines simples de W .*

Démonstration. Notons \mathfrak{a} l'image de \mathfrak{g} ou de $\mathfrak{g}_{\mathcal{R}_0}$ dans $\mathfrak{gl}(V)$. Pour m générique, V est semi-simple comme représentation de \mathfrak{g} et de $\mathfrak{g}_{\mathcal{R}_0}$ d'après la proposition 1 donc \mathfrak{a} est réductive et $\mathfrak{a}' = [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{sl}(V)$ est semi-simple. D'après les propositions 3 et 4, elle agit de façon irréductible sur V . Pour \mathfrak{a} l'image de \mathfrak{g} il suffit de montrer $\mathfrak{a}' = \mathfrak{sl}(V)$ car T agit par le scalaire $m + c(W)$, non nul pour $m \neq -c(W)$. Comme ce scalaire est également la trace de tout τ_s il en est de même pour l'image de $\mathfrak{g}_{\mathcal{R}_0}$. On démontre $\mathfrak{a}' = \mathfrak{sl}(V)$ par récurrence sur le rang de W .

Soit $\widetilde{W} \subset W$ un sous-groupe parabolique maximal irréductible de W , nécessairement de type ADE, $\widetilde{\mathfrak{g}}$ l'algèbre de Lie et $\widetilde{\mathcal{R}}$ l'ensemble de réflexions associés, $\widetilde{\mathcal{R}}_0 = \widetilde{\mathcal{R}} \cap \mathcal{R}_0$ et \widetilde{V} la représentation de Krammer infinitésimale correspondante. On a un morphisme injectif de $\widetilde{\mathfrak{g}}$ -modules $\widetilde{V} \rightarrow \text{Res}_{\widetilde{\mathfrak{g}}} V$ induit par l'inclusion $\widetilde{\mathcal{R}} \subset \mathcal{R}$. En particulier, \mathfrak{a}' contient l'image de $[\widetilde{\mathfrak{g}}, \widetilde{\mathfrak{g}}]$ ou de $[\widetilde{\mathfrak{g}}_{\widetilde{\mathcal{R}}_0}, \widetilde{\mathfrak{g}}_{\widetilde{\mathcal{R}}_0}]$ dans $\mathfrak{sl}(\widetilde{V}) \subset \mathfrak{sl}(V)$, de rang supposé égal à $\#\widetilde{\mathcal{R}} - 1$. Ainsi, $\text{rg}(\mathfrak{a}') \geq \#\widetilde{\mathcal{R}} - 1$ et l'on peut en déduire la conclusion en appliquant la proposition 6 pourvu que l'on puisse trouver \widetilde{W} avec $\#\widetilde{\mathcal{R}} - 1 > \frac{1}{2}\#\mathcal{R}$ et tel que $\widetilde{\mathcal{R}}_0$ corresponde aux racines simples de \widetilde{W} . Or, prenant pour parabolique maximal un groupe de type $A_{n-1}, D_{n-1}, D_5, E_6, E_7$ suivant que W est de type A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 on constate aisément (cf. table 2) que ces hypothèses sont vérifiées pourvu que W soit de rang au moins 5. On complète cette démonstration en vérifiant que $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(V)$ pour au moins une valeur de m , au cas par cas sur A_1, A_2, A_3, A_4, D_4 en prenant par exemple $m = 7$ pour A_2, A_3 et $m = 8$ pour A_4, D_4 . (Sur les ordinateurs actuels, le calcul effectif dure moins de dix minutes.) \square

4. IDENTIFICATION AVEC LES REPRÉSENTATIONS DE KRAMMER

On suppose désormais $\mathbb{k} = \mathbb{C}$. Nous montrons ici que la monodromie de la représentation infinitésimale V est isomorphe sur $\mathbb{K} = \mathbb{C}((h))$ à la représentation de Krammer (généralisée) introduite dans [CW, CGW]. Comme le calcul de la monodromie est très délicat, on utilise la rigidité de certaines algèbres quotients des algèbres de groupe de certains groupes de réflexion (complexes) pour montrer que ces deux représentations sont isomorphes.

On rappelle tout d'abord certaines notations classiques. On suppose W de type ADE défini par un système de racines, et on note $\{s_1, \dots, s_n\}$ l'ensemble des réflexions simples correspondantes, étiquetées suivant l'ordre de [Bou]. Dans le cas ADE qui nous intéresse ici, s_i est relié à s_j si $\langle s_i, s_j \rangle$ est de type $I_2(3)$, et ces deux réflexions ne sont pas reliées si $\langle s_i, s_j \rangle$ est de type $I_2(2)$.

On note $R : B \rightarrow GL_N(K)$ la représentation que l'on obtient à partir de ρ par monodromie pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}((h))$ — on a en réalité $R(\sigma) \in GL_N(\mathbb{C}[[h]])$ pour tout $\sigma \in B$. Rappelons que l'endomorphisme $R(\sigma)$ est conjugué à $\rho(s) \exp(i\pi h \rho(t_s))$ si σ est un générateur d'Artin et $s = \pi(\sigma)$. D'autre part, pour m générique, R est irréductible ainsi que sa restriction à P parce que ρ est irréductible (prop. 3) : cela découle des arguments de [Ma5], prop. 7 ou 8. Enfin, rappelons que la classe d'isomorphisme de R ne dépend pas du point base choisi.

4.1. Factorisation par les algèbres de Hecke cubiques. Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$. On note $H_{a,b,c}(W)$ le quotient de $\mathbb{K}B$ par les relations $(\sigma_i - a)(\sigma_i - b)(\sigma_i - c) = 0$ pour tout i ou encore, ce qui est équivalent en type ADE, par la relation $(\sigma_1 - a)(\sigma_1 - b)(\sigma_1 - c) = 0$. Il est connu que, pour W de type A_2 et a, b, c tels que les inéquations de semi-simplicité $a \neq 0$, $a \neq b$, $a^2 - ab + b^2 \neq 0$ et leurs permutés par l'action naturelle de \mathfrak{S}_3 sur a, b, c soient satisfaites, ce quotient est de dimension finie et est isomorphe à l'algèbre de groupe sur \mathbb{K} d'un groupe de réflexions complexes de cardinal 24, numéroté G_4 dans la classification de Shephard et Todd. On renvoie à [Ma1, BM] pour ce résultat.

En particulier, le quotient $H_{a,b,c} = H_{a,b,c}(A_2)$ est semi-simple et ses représentations irréductibles se composent de trois représentations de dimension 1, notées S_x et définies par $\sigma_i \mapsto x$ pour $x \in \{a, b, c\}$, trois de dimension 2, notées $U_{x,y} = U_{\{x,y\}}$ pour $\{x, y\} \subset \{a, b, c\}$ de cardinal 2 et caractérisées par $Sp(\sigma_i) = \{x, y\}$, et une représentation de dimension 3 notée Y . Dans Y le spectre de σ_i est $\{a, b, c\}$. Ainsi les représentations irréductibles de $H_{a,b,c}$ sont caractérisées par le spectre de σ_1 si $\#\{a, b, c\} = 3$. Remarquons d'autre part que l'élément central $(\sigma_1\sigma_2)^3$ agit sur S_x par x^6 , sur $U_{x,y}$ par $-x^3y^3$ et sur Y par $a^2b^2c^2$.

Notons ρ la représentation de Krammer infinitésimale associée à un groupe de Coxeter W de type ADE et R la représentation de monodromie associée. Soit $\sigma = \sigma_1$, $s = \pi(\sigma) \in W$ et $t = t_s$. L'endomorphisme $R(\sigma)$ est semi-simple et conjugué à $\rho(s)\exp(\lambda h\rho(t))$ avec $\lambda = i\pi$, donc a pour spectre $q, -q^{-1}, q^m$ avec $q = \exp(\lambda h)$. On en déduit que cette représentation se factorise par $H_{q,-q^{-1},q^m}(W)$. Remarquons d'autre part que, si W est de type A_2 , les valeurs $q, -q^{-1}, q^m$ satisfont les inéquations de semi-simplicité pour $m \neq 1$.

4.2. Factorisation par les algèbres de Birman-Wenzl-Murakami. Dans [BW], Birman et Wenzl ont introduit un quotient de dimension finie de $H_{a,b,c}(W)$ pour W de type A_n . Cette construction a été généralisée par Cohen, Gijsbers et Wales dans [CGW]. On peut la définir comme suit :

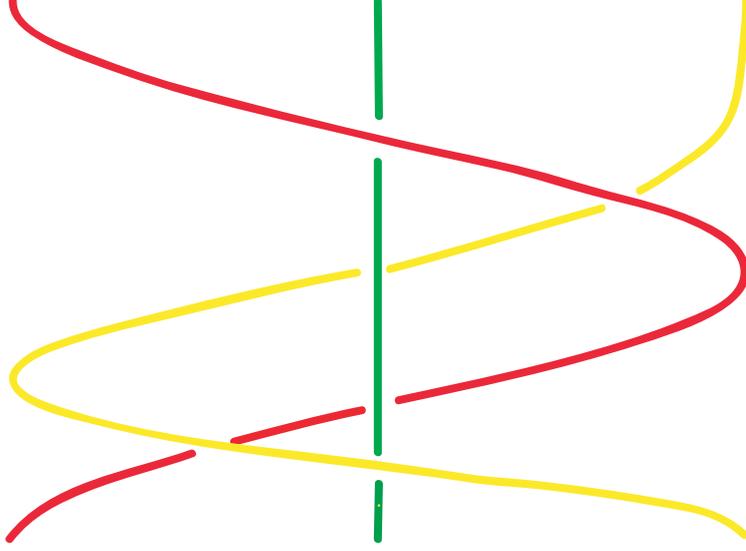
Définition 2. Soit W un groupe de Coxeter de type ADE. On définit l'algèbre $BMW(W)$ sur $\mathbb{Q}(\alpha, l)$, où α, l sont des indéterminées, comme le quotient de l'algèbre de groupe de B par les relations

$$(\sigma_1^2 + \alpha\sigma_1 - 1)(\sigma_1 - l^{-1}) = 0, e_i\sigma_j e_i = l e_i$$

si s_i et s_j sont reliées, et où $e_i = (l/\alpha)(\sigma_i^2 + \alpha\sigma_i - 1)$.

Pour $\alpha, l \in K \setminus \{0\}$ où K est un corps de caractéristique 0, on peut également définir une K -algèbre $BMW(W)$ spécialisée en ces valeurs, comme quotient de l'algèbre de groupe KB par les mêmes relations. Lorsque α et l , transcendants, sont de plus algébriquement indépendants sur \mathbb{Q} , ces deux algèbres sont isomorphes après extension des scalaires. En particulier, prenant $K = \mathbb{K}$, l'algèbre $BMW(W)$ s'identifie à un quotient de $H_{q,-q^{-1},q^m}(W)$ pour $\alpha = q^{-1} - q$ et $l = q^{-m}$ dès que $m \notin \mathbb{Q}$. En particulier, si $W = A_2$ c'est un quotient, semi-simple, de $H_{q,-q^{-1},q^m}$, dont les représentations irréductibles sont $S_q, S_{-q^{-1}}, U_{q,-q^{-1}}$ et Y .

Soient maintenant σ_i, σ_j tels que s_i soit reliée à s_j dans le diagramme de Coxeter de W , et \tilde{B} le sous-groupe de B engendré par σ_i, σ_j . Soit $s_0 = s_i s_j s_i$. Le groupe \tilde{B} est un groupe d'Artin de type A_2 , et la restriction de R à \tilde{B} est notée \tilde{R} . Pour vérifier que R se factorise par $BMW(W)$ il suffit donc de vérifier que \tilde{R} se factorise par $BMW(A_2)$, c'est-à-dire que cette représentation semi-simple n'admet que des composantes irréductibles de type $S_q, S_{-q^{-1}}, U_{q,-q^{-1}}$ et Y , soit encore que l'élément central $S_{ij} = (\sigma_i\sigma_j)^3$ n'admette pour valeurs propres que $q^6, q^{-6}, 1$ ou q^{2m} .

FIG. 1. Le lacet S_{ij}

Notons H_i, H_j les hyperplans de réflexion correspondant à σ_i et σ_j , et u_i, u_j des vecteurs normaux à ces hyperplans. Soit $X = H_i \cap H_j$. Décomposons $\mathbb{C}^n = X \oplus \mathbb{C}u_i \oplus \mathbb{C}u_j$ et notons z_i resp. z_j la coordonnée correspondant à u_i resp. u_j . On choisit u_i, u_j de telle façon que l'hyperplan de réflexion H_0 correspondant à $s_0 = s_i s_j s_i$ soit défini par $z_i = z_j$. On note α_H^* la restriction de α_H à X . Soit $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \setminus \{H_0, H_i, H_j\}$. On choisit $x \in X \setminus \bigcup \mathcal{A}'$ et $\epsilon > 0$ tel que $(x, a, b) \notin \bigcup \mathcal{A}$ dès que $|a|, |b| \in]0, 2\epsilon]$. On note $x_\epsilon = (x, \epsilon, 2\epsilon)$, qui n'appartient donc à aucun des hyperplans.

Introduisons alors le lacet $x_\epsilon(t) = (x, \epsilon \exp(2i\pi t), 2\epsilon \exp(2i\pi t))$ de base x_ϵ . Sa classe est S_{ij} . Pour s'en assurer, on peut par exemple utiliser l'identification des triplets $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tels que $a, b \neq 0, a \neq b$ avec les triplets $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ tels que $x \neq y, y \neq z, x \neq z$ en posant $a = y - x, b = z - x, c = x + y + z$. Alors les triplets $(\epsilon \exp(2i\pi t), 2\epsilon \exp(2i\pi t), 0)$ correspondent aux triplets $(-\epsilon \exp(2i\pi t), 0, \epsilon \exp(2i\pi t))$ qui forment un lacet de base $(-\epsilon, 0, \epsilon)$. Il est homotope au lacet $\gamma_\epsilon(t) = (-\epsilon \exp(2i\pi t), 0, \epsilon \exp(2i\pi t^2))$ par l'homotopie $(\alpha, t) \mapsto (-\epsilon \exp(2i\pi t), 0, \epsilon \exp(2i\pi(\alpha t + (1 - \alpha)t^2)))$. On peut représenter ce dernier comme une tresse en le projetant sur l'axe réel (cf. figure 1), ce qui permet de l'identifier à $(\sigma_i \sigma_j)^3 = (\sigma_j \sigma_i)^3$.

Pour simplifier les notations, on note $t_k = t_{s_k}$ pour $k \in \{0, i, j\}$. Le pullback de ω sur $[0, 1]$ suivant S_{ij} est alors

$$S_{ij}^* \omega = h \sum_{H \in \mathcal{A}'} \rho(t_H) \frac{O(\epsilon)}{\alpha_H^*(x) + O(\epsilon)} + 2i\pi \rho(t_0 + t_i + t_j) dt \rightarrow 2i\pi \rho(t_0 + t_i + t_j) dt$$

quand $\epsilon \rightarrow 0$. Comme, lorsque ϵ diminue, la classe de conjugaison de $R(S_{ij})$ ne varie pas, et que cette dernière est fermée car $R(S_{ij})$ est semi-simple, on en déduit que $R(S_{ij})$ est conjugué

à $\exp(2i\pi h(t_0 + t_i + t_j))$. En particulier, il suffit de vérifier que $\rho(t_0 + t_i + t_j)$ n'a pour valeurs propres que 3, -3 , 0 ou m .

Pour ce faire, on décompose V en somme de sous-espaces stables sous l'action de $T' = t_0 + t_i + t_j$. Notons d'abord que $\langle v_{s_i}, v_{s_j}, v_{s_0} \rangle$ est stable et que $T' = t_0 + t_i + t_j$ agit sur ce sous-espace par le scalaire m . On note $w_{s_k} = v_{s_k}$ pour $k \in \{0, i, j\}$.

Soit $\mathcal{R}' = \mathcal{R} \setminus \{s_i, s_j, s_0\}$. Si $u \in \mathcal{R}'$ commute à chacune des trois réflexions $\{s_i, s_j, s_0\}$, $\mathbb{C}v_u$ est stable et T' agit sur cette droite par la valeur 3. On note dans ce cas $w_u = v_u$.

Si au contraire $u \in \mathcal{R}'$ commute à au moins l'une d'entre elles, par exemple s_0 , mais pas à toutes, on montre facilement qu'elle ne commute à aucune des deux autres. De même, $s_i \bullet u$ ne commute alors qu'à s_j et $s_j \bullet u$ ne commute qu'à s_i . On note alors

$$w_u = v_u + \frac{2}{m(m-3)}v_{s_0} + \frac{m-1}{m(m-3)}(v_{s_i} + v_{s_j})$$

et $w_{s_i \bullet u} = s_i \bullet w_u$, $w_{s_j \bullet u} = s_j \bullet w_u$. On vérifie que $t_s \cdot w_x = w_{s \bullet x}$ pour $s \in \{s_i, s_j, s_0\}$ et $x \in \{u, s_i \bullet u, s_j \bullet u\}$. En particulier T' admet les valeurs propres 0 et 3 sur $\langle w_u, w_{s_i \bullet u}, w_{s_j \bullet u} \rangle = \langle v_u, v_{s_i \bullet u}, v_{s_j \bullet u} \rangle$.

On a alors défini w_u pour toute réflexion $u \in \mathcal{R}'$ commutant à une seule des réflexions s_0, s_i, s_j . On vérifie, facilement en type A_n, D_n , et au cas par cas en types E , que la dernière possibilité ($u \in \mathcal{R}'$ ne commutant à aucune des réflexions s_i, s_j, s_0) ne peut se produire en type ADE. Le fait que les $w_u, u \in \mathcal{R}$ forment une base de V conclut : la représentation R se factorise par $BMW(W)$ pour m générique, donc pour tout m par analyticité de la monodromie.

Proposition 8. *Pour tout $m \in \mathbb{C}$, la représentation R se factorise par $BMW(W)$ spécialisée en $\alpha = q^{-1} - q$, $l = q^{-m}$.*

4.3. Annulation sur l'idéal I_2 . Dans [CGW] est introduit un idéal remarquable de l'algèbre $BMW(W)$, noté I_2 , qui est engendré par les éléments $e_i e_j$ pour s_i non reliée à s_j , c'est-à-dire si s_i et s_j commutent. Nous allons montrer que R s'annule sur I_2 , c'est-à-dire $R(e_i e_j) = 0$. Cette fois encore, on peut supposer m générique.

Soient s_i et s_j non reliées. On note H_i, H_j les hyperplans de réflexion correspondants, et on peut décomposer $\mathbb{C}^n = X \oplus \mathbb{C}u_i \oplus \mathbb{C}u_j$ avec $X = H_i \cap H_j$, s_i resp. s_j agissant par -1 sur u_i resp. u_j . On note z_k la coordonnée correspondant à u_k pour $k \in \{i, j\}$, et α_H^* la restriction de α_H à X . Il existe $x \in X$ tel que $\alpha_H^*(x) \neq 0$ pour tout $H \in \mathcal{A}' = \mathcal{A} \setminus \{H_i, H_j\}$. On note $x_\epsilon = (x, \epsilon, \epsilon)$. Il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que, pour tout $\epsilon \in]0, \epsilon_0[$ et pour tout $H \in \mathcal{R}$ on ait $\alpha_H(x_\epsilon) \neq 0$, et même $\alpha_H((x, u\epsilon, v\epsilon)) \neq 0$ pour tous u, v de module 1. Prenant un tel x_ϵ pour point base, un chemin représentant σ_i (resp. σ_j) est $\sigma_{i,\epsilon} = (x, \epsilon \exp(2i\pi t), \epsilon)$ (resp. $\sigma_{j,\epsilon} = (x, \epsilon, \epsilon \exp(2i\pi t))$). On note $\tau_i = \tau_{H_i}$ avec $\tau_H = \rho(t_H)$. On a alors

$$\frac{1}{i\pi} \sigma_i^* \omega = h \left(\tau_i + \sum_{H \in \mathcal{A}'} \frac{O(\epsilon)}{\alpha_H^*(x) + O(\epsilon)} \tau_H \right) dt, \quad \frac{1}{i\pi} \sigma_j^* \omega = h \left(\tau_j + \sum_{H \in \mathcal{A}'} \frac{O(\epsilon)}{\alpha_H^*(x) + O(\epsilon)} \tau_H \right) dt$$

d'où $\sigma_i^* \omega \rightarrow hi\pi\tau_i dt$ et $\sigma_j^* \omega \rightarrow hj\pi\tau_j dt$ quand $\epsilon \rightarrow 0$.

En particulier, si R_ϵ désigne la monodromie de ρ avec point base x_ϵ , $R_\epsilon(\sigma_i) \rightarrow \tilde{\sigma}_i = \rho(s_i) \exp(i\pi h\tau_i)$ et $R_\epsilon(\sigma_j) \rightarrow \tilde{\sigma}_j = \rho(s_j) \exp(i\pi h\tau_j)$ quand $\epsilon \rightarrow 0$. Notons maintenant $E = e_i e_j$. On a $e_k^2 = \alpha e_k$ pour $k \in \{i, j\}$ et $e_i e_j = e_j e_i$, donc $E^2 = \alpha^2 E$. Ainsi, $R(E) = 0$ ssi $tr(R(E)) = 0$. Plus précisément, le spectre de E est inclus dans $\{0, \alpha^2\}$. Comme $\alpha^2 \equiv -4\pi^2 h^2 \pmod{h^3}$ on a donc $R(E) = 0$ ssi $tr(R(E)) \equiv 0 \pmod{h^3}$.

Remarquons que, puisque R se factorise par $BMW(W)$, on a nécessairement $tr(R(E)) \equiv 0 \pmod{h^2}$. D'autre part, les endomorphismes $R_\epsilon(E)$ sont conjugués pour $\epsilon \in]0, \epsilon_0[$ donc

$tr(R_\epsilon(E))$ ne dépend pas de ϵ . Il suffit alors de montrer que $tr(R_\epsilon(E))$ modulo h^3 tend vers 0 quand $\epsilon \rightarrow 0$, donc que $\tilde{e}_i \tilde{e}_j \equiv 0 \pmod{h^3}$ avec $\tilde{e}_k = (l/\alpha)(\tilde{\sigma}_k^2 + \alpha \tilde{\sigma}_k - 1)$ pour $k \in \{i, j\}$. Or on a

$$\tilde{e}_k = \rho \left((s_k - t_k)(1 - (m - t_k)\tilde{h}) + \tilde{h}^2 X_k + O(\tilde{h}^3) \right)$$

avec

$$X_k = \frac{m^2}{2}(s_k - t_k) + mt_k(t_k - s_k) + \frac{t_k}{6}(-4t_k^2 + 3s_k t_k + 1), \quad \tilde{h} = i\pi h$$

Remarquons ensuite que, puisque s_i et s_j ne sont pas reliées, $s_i - t_i$ et $s_j - t_j$ commutent et leurs images par ρ sont, à un scalaire près et pour des valeurs génériques de m , des projecteurs orthogonaux sur des droites orthogonales pour $(\cdot | \cdot)$. On en déduit que le produit de ces images est nul, ceci pour toute valeur de m . Ainsi,

$$\tilde{e}_i \tilde{e}_j \equiv \tilde{h}^2 \rho((s_i - t_i)X_j + X_i(s_j - t_j)) \pmod{h^3}.$$

et, notant $x \sim y$ si $\rho(x) = \rho(y)$, $(s_i - t_i)X_j \sim (s_i - t_i)\frac{t_j}{6}(-4t_j^2 + 3s_j t_j + 1)$. De plus, $(s_i - t_i)t_j \sim (s_i - t_i)s_j$, d'où $(s_i - t_i)X_j \sim (s_i - t_i)\frac{s_j}{6}(-4s_j^2 + 3s_j s_j + 1) = (s_i - t_i)\frac{s_j}{6}(-4 + 3 + 1) = 0$ et $\tilde{e}_i \tilde{e}_j \equiv 0 \pmod{h^3}$. On a ainsi montré

Proposition 9. *Pour tout $m \in \mathbb{C}$, la représentation R se factorise par $BMW(W)/I_2$ pour $\alpha = q^{-1} - q$, $l = q^{-m}$.*

4.4. Identification à la représentation de Krammer. Dans [CGW] la structure de $BMW(W)/I_2$ est analysée lorsque α et l sont algébriquement indépendants. On suppose donc $m \notin \mathbb{Q}$. Il existe un sous-groupe parabolique \tilde{W} de W telle que l'algèbre de Hecke \tilde{H} de \tilde{W} avec paramètres $q, -q^{-1}$ détermine toutes les représentations irréductibles de $BMW(W)/I_2$. Plus précisément, à toute (classe de) représentation irréductible θ de \tilde{H} est associée une représentation irréductible Γ_θ de $BMW(W)/I_2$ de dimension $(\#\mathcal{R}) \dim(\theta)$, et cette correspondance $\theta \rightarrow \Gamma_\theta$ entre classes de représentations irréductibles des deux algèbres est bijective.

A tous $u \in \mathcal{R}$ et $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $u \neq s_i$ et $us_i = s_i u$ les auteurs de [CGW] associent un élément $h_{u,i} \in \tilde{H}$ tel que la trace de $\Gamma_\theta(\sigma_i)$ soit

$$q^m + \sum_{\substack{u \neq s_i \\ us_i = s_i u}} \theta(h_{u,i}) + \frac{q - q^{-1}}{2} c'(W).$$

La représentation de Krammer généralisée est alors Γ_θ avec θ entièrement déterminé par $\theta(h_{u,i}) = q$. D'autre part, on a toujours $(h_{u,i} - q)(h_{u,i} + q^{-1}) = 0$, donc elle est caractérisée parmi les représentations Γ_θ par le fait d'être de dimension $\#\mathcal{R}$ et d'envoyer σ_1 sur un élément de trace $q^m + qc(W) + (q - q^{-1})\frac{c'(W)}{2}$. En effet, si une telle représentation est de dimension $\#\mathcal{R}$ on a $\dim \theta = 1$ donc $\theta(h_{u,i}) \in \{q, q^{-1}\}$, et

$$\sum_{\substack{u \neq s_i \\ us_i = s_i u}} \theta(h_{u,i}) = qc(W) \Leftrightarrow \forall u, i \quad \theta(h_{u,i}) = q.$$

Comme, pour m générique, R est une représentation irréductible de $BMW(W)/I_2$ de dimension $\#\mathcal{R}$, il suffit donc de montrer que $tr(R(\sigma_1))$ a la valeur voulue. Comme $R(\sigma_1)$ est conjugué à $\tilde{\sigma} = \rho(s \exp(\lambda t_s))$, il suffit de calculer la trace de $\tilde{\sigma}$.

On a $V = \mathbb{C}v_s \oplus U \oplus U'$ avec $U = \bigoplus_{\substack{u \neq s \\ us = su}} \mathbb{C}v_u$ et $U' = \bigoplus_{us \neq su} \mathbb{C}v_u$; de plus $\dim(U) = c(W)$, $\tilde{\sigma}.v_s = q^m v_s$, $\tilde{\sigma}.v_u = qv_u$ si $u \neq s$ et $us = su$. D'autre part U' est somme directe de $\frac{c'(W)}{2}$ plans stables pour l'action de s et t_s , engendrés par les familles de la forme $(v_u, v_{u'})$

telles que $\langle s, u, u' \rangle$ soit de type $I_2(3)$. Sur ces plans, $s = t_s$ admet pour vecteurs propres $v_u + v_{u'} + \frac{2}{m-1}v_s$, $v_u - v_{u'}$ associés respectivement aux valeurs propres 1 et -1 . Ainsi, la restriction de $\tilde{\sigma}$ à un de ces plans a pour trace $q - q^{-1}$, et on en déduit que $\text{tr}(R(\sigma_1))$ a la valeur voulue d'où le

Théorème A. *Pour tout W de type ADE et $m \notin \mathbb{Q}$, la représentation de Krammer R_K plongée dans $GL_N(\mathbb{K})$ par $q = e^h$ et $t = e^{mh}$ est isomorphe à R .*

Corollaire. *Les groupes d'Artin purs de type sphérique sont résiduellement nilpotent-sans-torsion. En particulier, ils sont bi-ordonnables.*

Démonstration. On peut supposer que W est un groupe de Coxeter irréductible. D'après [Cr], tout groupe d'Artin pur de type sphérique se plonge dans un groupe d'Artin pur de type ADE. On peut donc supposer que W est de type ADE. Notons toujours $\mathcal{M} = \mathbb{C}[[h]]$, $(x, y) = xyx^{-1}y^{-1}$ et $C^1P = (P, P)$, $C^{r+1}P = (P, C^rP)$ les termes de la suite centrale descendante de P . Il s'agit de montrer en particulier que leur intersection est triviale. Identifiant V à \mathbb{C}^N , on a $R(P) \subset 1 + hM_N(\mathcal{M})$ donc $R(C^rP) \subset 1 + h^{r+1}M_N(\mathcal{M})$ d'où

$$R\left(\bigcap_{r \geq 1} C^rP\right) = \{1\} \Rightarrow \bigcap_{r \geq 1} C^rP = \{1\}$$

par fidélité de R , au moins si les paramètres q et t de [CW] sont transcendants sur \mathbb{C} et algébriquement indépendants, ce qui est le cas dès que $m \notin \mathbb{Q}$. Autrement dit, R plonge P dans le groupe $1 + hM_N(\mathcal{M})$ qui est non seulement résiduellement nilpotent mais aussi résiduellement nilpotent-sans-torsion, donc bi-ordonnable (cf. par exemple [Pas]). \square

Remarquons que les modèles matriciels de la représentation de Krammer permettent également d'obtenir ce dernier résultat, en posant un peu artificiellement $q = e^h$ et $t = e^{mh}$ pour $m \notin \mathbb{Q}$ dans les modèles de [CW] et en réduisant les formules modulo h . Nous renvoyons à [Ma7] où nous avons utilisé cette méthode.

5. ENVELOPPE ALGÈBRIQUE ET UNITARITÉ DE LA REPRÉSENTATION DE KRAMMER

5.1. Enveloppe algébrique. Le calcul de l'image de ρ nous permet de déterminer l'enveloppe algébrique des groupes d'Artin de type ADE dans la représentation de Krammer associée. Notons $V_h = V \otimes \mathbb{K}$. Pour toute réflexion s de W , il existe un $\sigma \in P$ tel que $R(\sigma)$ est congru à $\exp(2i\pi h\rho(t_s))$ modulo h^2 (σ est par exemple un lacet faisant un tour complet autour de l'hyperplan associé à s).

On déduit alors des arguments de [Ma5], prop. 24 (ou bien [Ma6] section 7.1) que l'algèbre de Lie de l'enveloppe algébrique de $R(B)$ contient l'image de \mathfrak{g} tensorisée par \mathbb{K} . D'après la proposition 7, on sait que c'est $\mathfrak{gl}_N(\mathbb{k}) \otimes \mathbb{K} = \mathfrak{gl}_N(\mathbb{K})$. On en déduit

Théorème B. *Pour tout groupe de Coxeter fini irréductible de type ADE et $m \notin \mathbb{Q}$, la représentation R identifie B à un sous-groupe Zariski-dense de $GL_N(\mathbb{K})$, où N est le nombre de réflexions de W . Il en est de même des images des sous-groupes C_W^k engendrés par les éléments $\sigma_1^{2k}, \dots, \sigma_n^{2k}$ où les σ_i désignent les générateurs d'Artin de B et $k \geq 1$.*

Notons \mathbb{L} le corps des fractions de \mathcal{L} . Comme, pour tout $m \notin \mathbb{Q}$, la représentation R est isomorphe à la représentation de Krammer R_K après extension des scalaires, on déduit immédiatement de ce théorème le

Corollaire. *Pour tout groupe d'Artin sphérique irréductible de type ADE, la représentation de Krammer R_K identifie B à un sous-groupe Zariski-dense de $GL_N(\mathbb{L})$,*

5.2. Remarques sur d'autres sous-groupes. Ce théorème de Zariski-densité implique, par des arguments généraux que nous détaillons plus loin, la Zariski-densité de nombreux sous-groupes de ces groupes : essentiellement des sous-groupes sous-normaux et les sous-groupes d'indice fini. En plus de ceux-ci, on peut également raffiner la démonstration de ce théorème afin d'obtenir la Zariski-densité d'autres sous-groupes qui ne rentrent pas dans ce cadre. Nous donnons ici un exemple en type A_{n-1} . Rappelons que, en type A_{n-1} , le groupe d'Artin pur est engendré par les éléments

$$\xi_{ij} = \sigma_{j-1} \dots \sigma_{i+1} \sigma_i^2 \sigma_{i+1}^{-1} \dots \sigma_{j-1}^{-1}$$

pour $1 \leq i < j \leq n$, et les sous-groupes $F_n^k = \langle \xi_{in}^k \mid 1 \leq i < n \rangle$ pour $k \geq 1$ sont des sous-groupes remarquables de B , qui ne sont sous-normaux que si $k = 1$.

Proposition 10. *Soit W de type A_{n-1} , et $m \notin \mathbb{Q}$. Alors, pour tout $k \geq 1$, le groupe $R(F_n^k)$ est Zariski-dense dans $GL_N(\mathbb{K})$.*

La démonstration est identique, sous la réserve de montrer que que l'application $\mathfrak{g}_{\mathcal{S}} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ pour $\mathcal{S} = \{(1 \ n), \dots, (n-1 \ n)\}$ est surjective. La démonstration de ce dernier fait est similaire à celle de la proposition 7. L'hypothèse non vérifiée est que $\mathcal{S} \cap \mathfrak{S}_{n-1}$ est vide. Pour résoudre ce problème, on remarque que l'image de $\mathfrak{g}_{\mathcal{S}}$ est conjuguée à l'image de $\mathfrak{g}_{\mathcal{S}'}$ avec $\mathcal{S}' = \{(1 \ n-1), \dots, (n-2 \ n-1), (n-1 \ n)\}$ par l'image de la transposition $(n-1 \ n)$. On montre alors que l'image de $\mathfrak{g}_{\mathcal{S}'}$ est $\mathfrak{gl}(V)$ par le même argument puisque $\mathcal{S}' \cap \mathfrak{S}_{n-1}$ engendre \mathfrak{S}_{n-1} et il en est donc de même de l'image de $\mathfrak{g}_{\mathcal{S}}$.

5.3. Unitarité. Nous discutons ici du lien entre l'unitarité infinitésimale de ρ et l'éventuelle unitarisabilité de R . Soit \mathbb{k} un corps de caractéristique 0 et supposons \mathfrak{g} , \mathfrak{B} et ρ définies sur \mathbb{k} . Les algèbres \mathfrak{g} et \mathfrak{B} sont naturellement graduées, par $\deg t_s = 1$ pour tout $s \in \mathcal{R}$, et $\deg(w) = 0$ si $w \in W$. On note $\widehat{\mathfrak{B}}$ et $\widehat{\mathfrak{g}}$ les complétions de \mathfrak{B} et \mathfrak{g} par rapport à cette graduation. On a $\exp \widehat{\mathfrak{g}} \subset \widehat{\mathfrak{B}}$. Pour déduire de ρ une représentation de B sur $\mathbb{K} = \mathbb{k}(\!(h)\!)$ il suffit d'avoir un morphisme $\widehat{\Phi} : B \rightarrow \widehat{\mathfrak{B}}$. En effet, notant $\tilde{\rho}$ la représentation de $\widehat{\mathfrak{B}}$ dans $\text{End}(V_h)$ définie par $\tilde{\rho}(w) = \rho(w)$ pour $w \in W$ et $\tilde{\rho}(t_s) = h\rho(t_s)$, $\widehat{\Phi}(\rho) = \tilde{\rho} \circ \widehat{\Phi}$ définit une représentation de B dans $GL(V_h)$. Un tel morphisme est donné pour $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ par monodromie, et permet d'obtenir la représentation de Krammer R .

Supposons que l'on ait un morphisme $\widehat{\Phi} : B \rightarrow \widehat{\mathfrak{B}}$ satisfaisant la condition suivante

$$(1) \quad \exists \Phi_1, \dots, \Phi_n \in \exp \widehat{\mathfrak{g}} \mid \widehat{\Phi}(\sigma_i) = \Phi_i s_i \exp(t_{s_i}) \Phi_i^{-1}$$

Alors la représentation $\widehat{\Phi}(\rho)$ correspondante de B prend ses valeurs dans le groupe unitaire formel $U_N^\varepsilon(K)$ correspondant à l'automorphisme involutif $\varepsilon : f(h) \mapsto f(-h)$ de K et à la forme (\mid) . Si $\mathbb{k} \subset \mathbb{R}$, on a montré dans [Ma5] que, après torsion des coefficients de la représentation par un automorphisme convenable de K de manière à faire converger les coefficients pour $h \in i\mathbb{R}$ suffisamment proche de 0, on pouvait en déduire des représentations unitaires \tilde{R} de B , pourvu que (\mid) soit définie positive. On a montré ici que tel était le cas pour $m > \#\mathcal{R} - c(W)$.

L'existence de tels morphismes satisfaisant (1) est établie si B est « fiber-type » au sens de Falk et Randell, c'est-à-dire si W est de type A_n , B_n ou diédral. C'est en effet une conséquence des travaux de Drinfeld [Dr] en type A_n , Enriquez [En] en type B_n et de [Ma4] pour les groupes diédraux. Malheureusement ce résultat reste pour l'instant à l'état de conjecture en types D_n et E_6, E_7, E_8 .

En type A_n , cela nous permet en tous cas de retrouver abstraitement un résultat de R. Budney, qu'il démontre dans [Bu] en construisant une forme quadratique explicite.

Proposition 11. *La représentation de Krammer en type A_{n-1} est unitarisable pour $|q| = 1$ proche de 1 et $m > \#\mathcal{R} - c(W) = 2n - 3$.*

Démonstration. Nous utilisons les notations de [Ma5]. Soit $\Phi \in \text{Assoc}_1(\mathbb{Q})$ un associateur rationnel et $\tilde{\Phi}$ le morphisme de Drinfeld associé. On démontre facilement que $\hat{\Phi}(\rho)$ se factorise par $BMW(A_n)$: cette représentation irréductible se factorise par l'algèbre de Birman-Wenzl-Murakami soit pour les mêmes raisons que la représentation R , soit en utilisant les arguments de [Ma2] prop. 4 ; l'identification avec la représentation de Krammer découle alors du fait que $\hat{\Phi}(\rho)(\delta_r) = \exp(2h\rho(Y_r))$, avec $Y_r = t_{1r} + \dots + t_{r-1,r}$, $\delta_r = \sigma_{r-1} \dots \sigma_2 \sigma_1^2 \sigma_2 \dots \sigma_{r-1}$, et que le spectre de l'action des δ_r permet d'identifier la représentation irréductible de l'algèbre de Birman-Wenzl-Murakami considérée (cf. [Ma2], section 9). Après torsion de la représentation par un automorphisme adéquat du corps des coefficients et spécialisation en $h \in i\mathbb{R}$ suffisamment proche de 0 on en déduit des représentations unitaires \tilde{R}_h (cf. [Ma5], appendice A). Pour des valeurs génériques de h , ces représentations sont bien isomorphes aux représentations de Krammer au moins si l'on a pris soin de choisir l'automorphisme de telle façon que l'image des générateurs d'Artin soit suffisamment proche, modulo h , de leur image dans la représentation originelle. \square

6. APPLICATIONS AUX GROUPES D'ARTIN-TITS

6.1. Zariski-densité : preuve du théorème 4. Le but de cette section est de démontrer le théorème 4, à savoir que tout groupe d'Artin-Tits sphérique et irréductible se plonge de façon Zariski-dense dans un groupe linéaire $GL_N(K)$. On peut prendre pour \mathbb{k} un corps de caractéristique 0 quelconque et $K = \mathbb{K}$. Pour simplifier l'exposé, on supposera $\mathbb{k} = \mathbb{C}$. D'après le théorème B, c'est le cas lorsque W est de type ADE . Lorsque B est de type B_n , il se plonge dans un groupe de type A_n . En effet, si l'on note $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ les générateurs d'Artin naturels d'un groupe G de type A_{n-1} , il est classique que le sous-groupe H engendré par $\sigma_1^2, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ est de type B_n , et est d'indice 2 dans G . De plus, il contient le sous-groupe C_n^1 de G . On en déduit que, notant $R : G \rightarrow GL_N(\mathbb{K})$ la représentation construite en type A_{n-1} , $R(H)$ est également Zariski-dense dans $GL_N(K)$, donc le résultat est vrai en type B_n .

Pour traiter les groupes de type $I_2(m)$ nous allons utiliser la représentation de Burau. Rappelons que, pour tout groupe de Coxeter W , la représentation de Burau réduite est une déformation de la représentation de réflexion de W . Plus précisément, il s'agit de la représentation (irréductible) de l'algèbre de Hecke de W qui correspond à la représentation de réflexion de W . On définit ici l'algèbre de Hecke de W comme le quotient de l'algèbre de groupe $\mathbb{K}B$ par l'idéal engendré par les éléments $(\sigma - q)(\sigma + q^{-1})$, où $q = e^h$ et σ parcourt les générateurs d'Artin de B .

Si $\rho_0 : W \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ est la représentation de réflexion de W , alors il existe une représentation équivariante $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ définie par $\rho(t_s) = \rho_0(s)$ pour tout $s \in \mathcal{R}$, et il est classique que la monodromie $R_{\text{bur}} : B \rightarrow GL_N(\mathbb{K})$ d'une telle représentation est isomorphe à la représentation de Burau réduite de B . Définissons $\tilde{R}_{\text{bur}} : B \rightarrow GL_N(\mathbb{K})$ par $\tilde{R}_{\text{bur}}(\sigma) = qR_{\text{bur}}(\sigma)$ si σ est un générateur d'Artin. Alors \tilde{R}_{bur} est la monodromie de $\tilde{\rho} : t_s \mapsto \text{Id} + \rho_0(s)$.

Revenant au cas des groupes de type $I_2(m)$ pour $m \geq 2$, il a été démontré par G. Lehrer et N. Xi que \tilde{R}_{bur} était fidèle (cf. [LX], prop. 4.1). Pour conclure comme précédemment à la Zariski-densité de $\tilde{R}_{\text{bur}}(B)$ et de ses sous-groupes $\tilde{R}_{\text{bur}}(C_W^k)$, il suffit de vérifier que, si une

présentation de W est donnée par $\langle s, t \mid s^2 = t^2 = 1, (st)^m = 1 \rangle$, alors les matrices

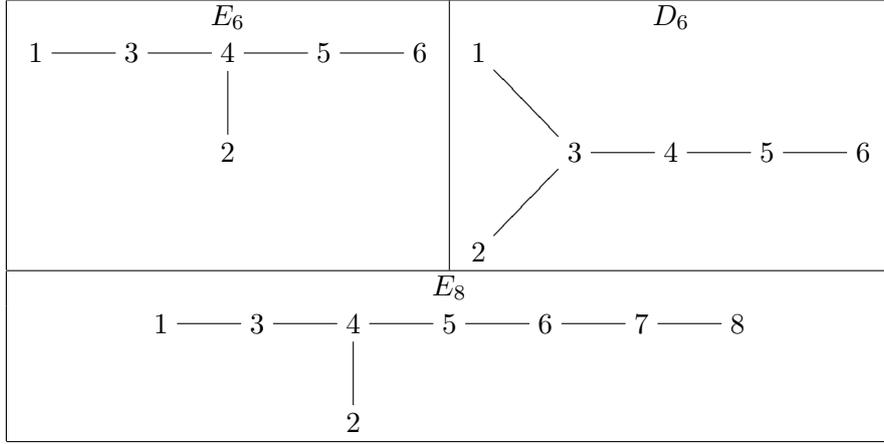
$$\tilde{\rho}(s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -c & 2 \end{pmatrix} \quad \tilde{\rho}(t) = \begin{pmatrix} 2 & -c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec $c = 2 \cos(\frac{2\pi}{m})$, engendrent l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C})$, ce qui se vérifie immédiatement.

Il reste à démontrer ce résultat pour les groupes exceptionnels de type F_4, H_3 et H_4 . Nous numérotions les générateurs d'Artin σ_i de ces groupes exceptionnels comme suit :

F_4	H_3	H_4
1 — 2 = 3 — 4	1 ≡ 2 — 3	1 ≡ 2 — 3 — 4

Ces trois groupes admettent des plongements naturels dans des groupes de type ADE , plus précisément dans les groupes suivants



et les plongements des premiers dans les seconds sont définis comme suit

« $F_4 \rightarrow E_6$ »	« $H_3 \rightarrow D_6$ »	« $H_4 \rightarrow E_8$ »
$\sigma_1 \mapsto \sigma_2$	$\sigma_1 \mapsto \sigma_4 \sigma_1$	$\sigma_1 \mapsto \sigma_2 \sigma_5$
$\sigma_2 \mapsto \sigma_4$	$\sigma_2 \mapsto \sigma_5 \sigma_3$	$\sigma_2 \mapsto \sigma_4 \sigma_6$
$\sigma_3 \mapsto \sigma_3 \sigma_5$	$\sigma_3 \mapsto \sigma_6 \sigma_2$	$\sigma_3 \mapsto \sigma_3 \sigma_7$
$\sigma_4 \mapsto \sigma_1 \sigma_6$		$\sigma_4 \mapsto \sigma_1 \sigma_8$

Ces plongements font partie des « homomorphismes de pliage » définis par J. Crisp dans [Cr]. Ils sont injectifs, et préservent l'élément de Garside w_0 . Cet élément de B engendre le centre en types $F_4, H_3, H_4, D_6, E_7, E_8$. En type E_6 en revanche, le centre est engendré par w_0^2 . Cela implique que la représentation de Krammer restreinte $R_K \circ \varphi$ n'est pas absolument irréductible en type F_4 , et en particulier ne peut être d'image Zariski-dense. Plus précisément, l'action de l'élément de Garside du groupe d'Artin de type F_4 décompose la représentation de Krammer de type E_6 , de dimension 36, en somme de deux composantes, respectivement de dimension 24 et 12 (on note que le groupe de Coxeter de type F_4 admet 24 réflexions). F. Digne a montré dans [D] que l'action de F_4 sur cette composante de dimension 24 était fidèle. Cela signifie que la représentation correspondante $R_{K'} : B \rightarrow GL_{24}(K)$ pour B de type F_4 est injectif. Pour B de type H_3 ou H_4 , on notera $R_{K'} = R_K \circ \varphi$.

Il reste à vérifier que les $\log R_{K'}(\sigma^2)$ engendrent $\mathfrak{gl}_N(K)$, pour σ parcourant les générateurs d'Artin de B , quand B est de type F_4, H_3, H_4 , et $N = 24, 30, 120$, respectivement. Pour ce faire, il suffit de vérifier que les $u(\sigma) = (h^{-1} \log R_{K'}(\sigma^2)) \bmod h$ engendrent $\mathfrak{gl}_N(\mathbb{k})$, c'est-à-dire qu'ils engendrent une algèbre de Lie de dimension N^2 , au moins pour une certaine

valeur de m . On obtient des modèles matriciels¹ à coefficients entiers à partir de [D], donc on peut supposer $u(\sigma) \in \mathfrak{gl}_N(\mathbb{Z})$. Le calcul sur ces matrices à coefficients entiers a été fait informatiquement, à l'aide d'un programme en langage C et en réduisant modulo 19 pour augmenter la vitesse d'exécution et réduire la taille mémoire nécessaire. En choisissant par exemple les valeurs $m = 5$ pour les types H_3 et F_4 , $m = 7$ pour les types H_3 et H_4 , on obtient que l'algèbre de Lie engendrée par les matrices $u(\sigma) \in \mathfrak{gl}_N(\mathbb{F}_{19})$ est $\mathfrak{gl}_N(\mathbb{F}_{19})$, donc l'algèbre de Lie engendrée par les $u(\sigma)$ est de dimension N^2 sur \mathbb{Q} donc sur \mathbb{k} pour au moins une valeur de m . Ceci conclut la démonstration du théorème 4.

6.2. Application aux décompositions en produit direct. Nous appliquons ici le résultat de Zariski-densité de la représentation de Krammer (généralisée) au problème de la décomposition en produit direct des groupes d'Artin et de ses sous-groupes remarquables. Ces résultats peuvent également se déduire de la section suivante. Nous en donnons ici une preuve directe de nature différente. Le lemme clé est le suivant.

Lemme 2. *Soit G un groupe, et V une représentation semi-simple fidèle de G sur un corps K algébriquement clos de caractéristique 0 telle que $V \otimes V$ ait au plus trois composantes irréductibles. Si G est produit direct $G_1 \times G_2$ de deux de ses sous-groupes, alors $G_1 \subset Z(G)$ ou $G_2 \subset Z(G)$.*

Démonstration. Notons tout d'abord que V est nécessairement irréductible, car sinon $V \otimes V$ aurait au moins quatre composantes. Supposons $G \simeq G_1 \times G_2$. Comme V est irréductible, $V \simeq V_1 \otimes V_2$, avec V_i une représentation irréductible de G_i . Comme V est fidèle, il en est de même des V_i . Or

$$\begin{aligned} V \otimes V &\simeq (V_1 \otimes V_2) \otimes (V_1 \otimes V_2) \\ &\simeq (V_1 \otimes V_1) \otimes (V_2 \otimes V_2) \\ &\simeq (S^2V_1 \oplus \Lambda^2V_1) \otimes (S^2V_2 \oplus \Lambda^2V_2) \\ &\simeq (S^2V_1 \otimes S^2V_2) \oplus (S^2V_1 \otimes \Lambda^2V_2) \oplus (\Lambda^2V_1 \otimes S^2V_2) \oplus (\Lambda^2V_1 \otimes \Lambda^2V_2) \end{aligned}$$

Donc, comme les dimensions des V_i sont au moins 1, on en déduit $\Lambda^2V_2 = 0$ ou $\Lambda^2V_1 = 0$, donc V_2 ou V_1 est de dimension 1. Comme les V_i sont fidèles, on en déduit que G_1 ou G_2 est commutatif, d'où la conclusion. □

On en déduit

¹Dans [D] il convient de corriger les deux données suivantes. Page 56, si l'on note α_i la racine simple correspondant à s_i , notamment $\alpha_2 < \alpha_3$, l'ordre choisi pour les racines positives $x\alpha_1 + y\alpha_2 + z\alpha_3 + t\alpha_4$ n'est pas celui indiqué. La liste ordonnée des quadruplets $[x, y, z, t]$ est au contraire

$$\begin{aligned} &[1, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 1], [0, 1, 0, 0], [0, 0, 1, 0], [1, 1, 0, 0], [0, 0, 1, 1], [0, 1, 1, 0], [1, 1, 1, 0], \\ &[0, 1, 1, 1], [0, 2, 1, 0], [1, 1, 1, 1], [1, 2, 1, 0], [0, 2, 1, 1], [1, 2, 1, 1], [2, 2, 1, 0], [0, 2, 2, 1], \\ &[1, 2, 2, 1], [2, 2, 1, 1], [1, 3, 2, 1], [2, 2, 2, 1], [2, 3, 2, 1], [2, 4, 2, 1], [2, 4, 3, 1], [2, 4, 3, 2] \end{aligned}$$

D'autre part, les formules décrivant la représentation en type D_n sont incomplètes. Dans la description de l'image de $\rho(s)(e_r)$, page 52, il faut corriger le quatrième cas en

$$\begin{aligned} qe_{srs} + (1-q)e_r + t \frac{(q-1)^2(q^i-1)}{q^i} &\quad \text{si } \alpha + \beta \in \Phi, n(\alpha + \beta) = i \geq 1, n(\beta) = i - 1 \\ qe_{srs} + (1-q)e_r &\quad \text{si } \alpha + \beta \in \Phi, n(\alpha + \beta) = i \geq 1, n(\beta) \neq i - 1 \end{aligned}$$

Proposition 12. *Soit K un corps de caractéristique 0, et $R : G \rightarrow GL_N(K)$ une représentation fidèle de G telle que $R(G)$ soit Zariski-dense dans $GL_N(K)$. Si Γ est un sous-groupe d'indice fini de G et $\Gamma \simeq \Gamma_1 \times \Gamma_2$, alors Γ_1 ou Γ_2 est commutatif.*

Démonstration. Soit $V = K^N$. On peut supposer que K est clos parce que $R(G)$ est également Zariski-dense dans $GL_N(\overline{K})$, \overline{K} désignant la clôture algébrique de K . Puisque l'adhérence de Zariski $\overline{R(G)}$ de $R(G)$ est irréductible en tant que variété algébrique, que Γ est d'indice fini dans G et que R est fidèle, on a $\overline{R(\Gamma)} = \overline{R(G)} = GL_N(K)$. Ainsi, V et les deux composantes S^2V et Λ^2V de $V \otimes V$ sont irréductibles sous l'action de Γ . D'après le lemme précédent on en déduit la conclusion. \square

Le théorème 5b est alors une conséquence immédiate du théorème 4 et de la proposition précédente (voir également [CH] pour une autre preuve de cette implication). En fait, la même démonstration permet de montrer un résultat beaucoup plus fort, puisque de nombreux sous-groupes de B sont Zariski-denses dans un groupe linéaire. Comme cette propriété de non-décomposabilité est une conséquence de la propriété (L) du théorème 6, établie ci-dessous, nous nous contenterons de préciser les sous-groupes pour lesquels nous avons démontré cette dernière propriété.

6.3. Groupes fortement linéaires. Si K est un corps (commutatif) et G un sous-groupe de $GL_N(K)$, on désigne par \overline{G} son adhérence dans $GL_N(K)$ pour la topologie de Zariski. C'est un sous-groupe algébrique de $GL_N(K)$. Rappelons que $Z(SL_N(K)) = \mu_N(K)$ est un groupe fini et que tout sous-groupe (algébrique) distingué propre de $SL_N(K)$ est inclus dans son centre. Suivant les conventions usuelles en théorie des groupes, $H < G$ (resp. $H \triangleleft G$) signifie que H est un sous-groupe (resp. un sous-groupe normal) de G et, pour $H_1, H_2 < G$, la notation (H_1, H_2) désigne le sous-groupe de G engendré par les commutateurs $(x, y) = xyx^{-1}y^{-1}$ pour $x \in H_1, y \in H_2$. Lorsque $H_1, H_2 \triangleleft G$, on a $H_1 \cap H_2 \subset (H_1, H_2)$.

Définition 3. *On dit qu'un groupe sans torsion G est fortement linéaire en dimension N sur un corps (commutatif) K s'il existe un morphisme injectif $\iota : G \rightarrow GL_N(K)$ tel que $\overline{\iota(G)} \supset SL_N(K)$.*

S'il existe N et K tels que cette situation se présente, on dira également que G est fortement linéaire, sans préciser N et K . Un groupe fortement linéaire est évidemment linéaire au sens habituel.

Remarquons que, puisque G est supposé sans torsion, tous ses sous-groupes le sont également. En particulier, identifiant un tel G à son image dans $GL_N(K)$, pour $B < G$ la propriété $B < Z(SL_N(K))$ équivaut à $B = \{e\}$. De plus, si $G \neq \{e\}$ alors G est infini, donc K est nécessairement un corps infini.

Si un tel G est non abélien on a $N \geq 2$ et, inversement, si G était abélien son action sur K^N ne pourrait être irréductible pour $N \geq 2$, ce qui contredirait $\overline{\iota(G)} \supset SL_N(K)$. Ainsi, pour un tel groupe, G abélien équivaut à $N = 1$.

Rappelons les deux faits élémentaires suivants concernant la topologie de Zariski.

- (1) si $K \subset L$ est une extension de corps, alors pour tout $N \geq 1$ la topologie de Zariski de K^N est induite par celle de L^N
- (2) si de plus K est infini, alors K^N est Zariski-dense dans L^N .

En conséquence de (1), la topologie de Zariski de $GL_N(K)$ est induite par celle de $GL_N(L)$. De plus, en tant que variété algébrique sur K , $SL_N(K)$ est K -rationnelle, c'est-à-dire qu'elle

admet un ouvert isomorphe à un ouvert de l'espace affine. Une conséquence de (2) est donc que, si K est infini, alors $SL_N(K)$ est dense dans $SL_N(L)$.

Supposons que l'on ait un plongement $\iota_K : G \hookrightarrow GL_N(K)$, le groupe G étant toujours supposé sans torsion, donc en particulier K est un corps infini, et soit L un surcorps de K . On note $\iota_L : G \hookrightarrow GL_N(L)$ le morphisme induit.

Lemme 3. $\overline{\iota_K(G)} \supset SL_N(K)$ si et seulement si $\overline{\iota_L(G)} \supset SL_N(L)$.

Démonstration. On peut supposer $G < GL_N(K) < GL_N(L)$. On note pour les distinguer \overline{G} l'adhérence de G dans $GL_N(K)$ et \widehat{G} son adhérence dans $GL_N(L)$. On a $\overline{G} = \widehat{G} \cap GL_N(K)$ parce la topologie de Zariski de $GL_N(K)$ est induite de celle de $GL_N(L)$. Alors $\widehat{G} \supset SL_N(L)$ implique

$$\overline{G} = \widehat{G} \cap GL_N(K) \supset SL_N(L) \cap GL_N(K) = SL_N(K)$$

et réciproquement $\overline{G} \supset SL_N(K)$ implique

$$\widehat{G} = \widehat{\overline{G}} \supset \widehat{SL_N(K)} = SL_N(L).$$

□

En conséquence on pourra toujours supposer K algébriquement clos. De plus, sous ces hypothèses :

- (1) G agit de façon absolument irréductible sur K^n .
- (2) $Z(G) \subset K^\times$, et $(G, G) \cap Z(G) = \{e\}$.

On rappelle d'autre part le résultat classique suivant. L'idée de l'appliquer dans ce cadre est empruntée à [CH].

Proposition 13. (cf. [Bor], 2.4) Soit Γ un groupe algébrique défini sur un corps K , et M_1, M_2 deux sous-groupes de $\Gamma(K)$ non nécessairement fermés tels que M_1 normalise M_2 . Alors $\overline{M_1}$ normalise $\overline{M_2}$ et $(\overline{M_1}, \overline{M_2}) = (\overline{M_1}, \overline{M_2})$.

En particulier, un groupe fortement linéaire non abélien n'est jamais nilpotent. En effet, notant $(C^r G)_{r \geq 0}$ la suite centrale descendante du groupe G , une récurrence immédiate montre

Corollaire. Si G est fortement linéaire en dimension N sur K il en est de même de $C^r G$ pour tout $r \geq 0$.

De nombreux sous-groupes des groupes fortement linéaires le sont également.

Proposition 14. Soit G un sous-groupe sans torsion de $GL_N(K)$ tel que $\overline{G} \supset SL_N(K)$. Pour tout $B \triangleleft G$ tel que $B \not\subset Z(G)$ on a $\overline{B} \supset SL_N(K)$.

Démonstration. D'après le lemme 3 on peut supposer que K est algébriquement clos. Comme G normalise B , d'après la proposition 13 on sait que $\overline{G} \supset SL_N(K)$ normalise \overline{B} , donc $\overline{B} \cap SL_N(K)$ est un sous-groupe normal de $SL_N(K)$, algébrique sur K . Il suffit de montrer que $H = \overline{B} \cap SL_N(K) \not\subset \mu_N(K)$. Or $(G, B) < B < \overline{B}$ car $B \triangleleft G$, de plus $(G, B) < (GL_N(K), GL_N(K)) < SL_N(k)$ et enfin $(G, B) \neq \{e\}$ d'après l'hypothèse $B \not\subset Z(G)$. Ainsi H contient le groupe sans torsion $(G, B) \neq \{e\}$ donc $H \not\subset \mu_N(K)$, ce qui conclut. □

Proposition 15. Soit G un sous-groupe infini de $GL_N(K)$ tel que $\overline{G} \supset SL_N(K)$. Pour tout $B < G$ d'indice fini on a $\overline{B} \supset SL_N(K)$.

Démonstration. On suppose encore K algébriquement clos. Soient $g_1, \dots, g_r \in G$ tels que $G = g_1 B \sqcup \dots \sqcup g_r B$. Alors $\overline{G} = g_1 \overline{B} \cup \dots \cup g_r \overline{B}$ et $SL_N(K) \subset \overline{G}$ implique que $SL_N(K)$ est la réunion des $g_i \overline{B} \cap SL_N(K)$. Puisque K est algébriquement clos, c'est également vrai en tant que K -variété algébrique, donc il existe $i \in [1, r]$ tel que $g_i \overline{B} \supset SL_N(K)$ par irréductibilité de SL_N comme variété algébrique. En particulier $e \in g_i \overline{B}$ donc $g_i \in \overline{B}$ et $g_i \overline{B} = \overline{B} \supset SL_N(K)$. \square

On rappelle qu'un sous-groupe B d'un groupe G est dit *sous-normal* s'il existe une famille B_0, \dots, B_n de sous-groupes de G tels que $B = B_n < B_{n-1} < \dots < B_1 < B_0 = G$ et que, pour tout $i \in [0, n-1]$, on ait $B_{i+1} \triangleleft B_i$.

Théorème C. *Soit G un groupe sans torsion fortement linéaire (en dimension N sur K) et B un sous-groupe sous-normal de G non inclus dans le centre de G . Alors*

- (1) *B est fortement linéaire (en dimension N sur K) ainsi que ses sous-groupes d'indice fini.*
- (2) $Z(B) = Z(G) \cap B$.
- (3) *Si $A \triangleleft G$ et $A \not\subset Z(G)$, alors $A \cap B \not\subset Z(G)$.*

Démonstration. On suppose $G < GL_N(K)$ avec K algébriquement clos, et $\overline{G} \supset SL_N(K)$. Si G est abélien le résultat est évident donc on peut supposer $N \geq 2$. D'après le lemme de Schur on a $Z(G) \subset K^\times$. Soit B un sous-groupe sous-normal de G tel que $B \not\subset Z(G)$. On a donc $B = B_n < B_{n-1} < \dots < B_1 < B_0 = G$ avec $B_{i+1} \triangleleft B_i$, et $B \not\subset Z(G)$. On démontrera, par récurrence sur n , les assertions (2), (3) et (1'), avec (1') $\overline{B} \supset SL_N(K)$. On a (1') \Rightarrow (1) d'après la proposition 15.

Pour $n = 0$ c'est immédiat. Supposons alors $B = B_n < G$ satisfaisant (1'), (2) et (3), et soit $B' \triangleleft B$ tel que $B' \not\subset Z(G)$. On a $Z(B) = Z(G) \cap B$ donc, puisque $B' \subset B$, on a $B' \not\subset Z(B)$. On déduit alors de $\overline{B} \supset SL_N(K)$ que $\overline{B'} \supset SL_N(K)$ d'après la proposition 14. Ainsi (1') est démontré. D'autre part (2) découle de ce qu'alors $Z(B') \subset K^\times$, et $Z(G) = G \cap K^\times$ donc $Z(G) \cap B' = G \cap K^\times \cap B' = K^\times \cap B' = Z(B')$.

Soit maintenant $A \triangleleft G$ tel que $A \not\subset Z(G)$, et $A' = A \cap B$. Par hypothèse de récurrence on a $A' \not\subset Z(G)$ donc $A' \not\subset K^\times$ et en particulier $A' \not\subset Z(B)$. Comme $A' \triangleleft B$ on peut appliquer la proposition 14, donc $\overline{A'} \supset SL_N(K)$. De plus G donc B et B' normalisent A' d'où, d'après la proposition 13,

$$\overline{(A', B')} = (\overline{A'}, \overline{B'}) \supset (SL_N(K), SL_N(K)) = SL_N(K).$$

On en déduit $(A', B') \not\subset K^\times$ donc $A' \cap B' \not\subset K^\times$ puisque $A', B' \triangleleft B$. Or $Z(G) \subset K^\times$ donc $A' \cap B' \not\subset Z(G)$. On conclut par récurrence. \square

Corollaire 1. *Si G est un groupe fortement linéaire contenant deux sous-groupes A, B tels que $G \simeq A \times B$, alors $A \subset Z(G)$ ou $B \subset Z(G)$. Il en est de même de ses sous-groupes sous-normaux et d'indice fini.*

Démonstration. Par l'absurde, si $B \not\subset Z(G)$ et $A \not\subset Z(G)$ on peut appliquer le théorème puisque $A \triangleleft G$ et $B \triangleleft G$. On en déduit $A \cap B \not\subset Z(G)$, ce qui est absurde puisque $A \cap B = \{e\}$. \square

Notons $\text{Fit}(G)$ le sous-groupe de Fitting de G , c'est-à-dire le sous-groupe engendré par les sous-groupes normaux nilpotents de G .

Corollaire 2. *Si G est un groupe fortement linéaire, alors $\text{Fit}(G) = Z(G)$.*

Démonstration. En effet, $Z(G) < \text{Fit}(G)$ et, si $N \triangleleft G$ est nilpotent, alors N ne peut être fortement linéaire d'après le corollaire de la proposition 13, donc $N \subset Z(G)$ et $\text{Fit}(G) = Z(G)$. \square

Notons $\Phi(G)$ le sous-groupe de Frattini de G , intersection de ses sous-groupes maximaux.

Corollaire 3. *Si G est un groupe fortement linéaire qui est finiment engendré, alors $\Phi(G) \subset Z(G)$.*

Démonstration. Le cas où G est abélien est évident, donc on peut l'exclure. Comme G est linéaire et finiment engendré, $\Phi(G)$ est nilpotent d'après le théorème de Platonov [Pl]. Comme $\Phi(G) \triangleleft G$ on en déduit $\Phi(G) \subset Z(G)$, car sinon $\Phi(G)$ serait fortement linéaire en dimension $N \geq 2$, contredisant sa nilpotence. \square

7. ETUDE DU TYPE A_{n-1}

7.1. Généralités. Dans le cas où $W \simeq \mathfrak{S}_n$ est de type A_{n-1} , on choisit pour $\widetilde{W} \subset W$ un parabolique naturel de type A_{n-2} , isomorphe à \mathfrak{S}_{n-1} . On note $\mathcal{T}_n = \mathfrak{g}$, et $\mathcal{T}_{n-1} = \widetilde{\mathfrak{g}}$ l'algèbre de Lie associée à \widetilde{W} .

La représentation $V_n = V$ de \mathcal{T}_n a pour dimension $n(n-1)/2$. Notons v_{ij} et t_{ij} respectivement le vecteur de base et le générateur correspondant à la transposition $(i j)$. L'action est alors décrite par les formules

$$\begin{cases} t_{ij}.v_{jk} &= v_{ik} - v_{ij} \\ t_{ij}.v_{kl} &= v_{kl} \\ t_{ij}.v_{ij} &= mv_{ij} \end{cases}$$

où i, j, k, l correspondent à des indices distincts. On note V_n l'espace vectoriel sous-jacent, engendré par les v_{ij} , et \mathcal{T}_n l'algèbre de Lie des tresses infinitésimales pures, engendrée par les t_{ij} . On note $T_n = \sum t_{ij}$, qui agit par $m + c(W)$ sur V_n , et on plonge de façon naturelle \mathcal{T}_{n-1} dans \mathcal{T}_n .

7.2. Restriction à \mathcal{T}_{n-1} . Le \mathcal{T}_{n-1} -module V_n admet pour sous-espace stable le sous-espace engendré par les v_{ij} pour $i, j < n$. En tant que \mathcal{T}_{n-1} -module, il est naturellement isomorphe à V_{n-1} .

Notons $T' = T_{n-1}$, et, pour $1 \leq k \leq n-1$,

$$v'_k = \sum_{\substack{i \neq k \\ i \leq n-1}} v_{ik}, \quad w_{kn}^0 = v_{kn} + \frac{1}{m-n+4} v'_k, \quad w^0 = \sum_{i \leq n-1} w_{in}^0, \quad \check{v} = \sum_{i, j \leq n-1} v_{ij}.$$

On introduit alors les sous-espaces suivants

Sous - espaces	Dimension
$V_{n-1} = \langle v_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n-1 \rangle$	$\#\widetilde{\mathcal{R}}$
$U_{n-1} = \langle w_{kn}^0 - w_{k+1, n}^0 \mid 1 \leq k \leq n-2 \rangle$	$n-2$
$S_{n-1} = \langle w^0 + \frac{2(n-1)}{(m-n+4)(m-2n+5)} \check{v} \rangle$	1

Chacun de ces sous-espaces est stable pour l'action de \mathcal{T}_{n-1} , et on a $V_n = V_{n-1} \oplus U_{n-1} \oplus S_{n-1}$. Une base commode de $U_{n-1} \oplus S_{n-1}$ est donnée par les vecteurs $w_{kn}^1 = w_{kn}^0 + \frac{2}{(m-n+4)(m-2n+5)} \check{v}$ pour $1 \leq k \leq n-1$. Dans cette base, on a $t_{ij}.w_{kn}^1 = w_{kn}^1$ si $k \notin \{i, j\}$, $t_{ik}.w_{kn}^1 = w_{in}^1$. On en

déduit que $U_{n-1} \oplus S_{n-1}$ s'identifie à la représentation de Burau (non réduite) infinitésimale de [Ma2, Ma3].

7.3. Forme quadratique. On suppose $n \geq 3$. On a $(v_{ij}|v_{ij}) = m - 1$, $(v_{ij}|v_{jk}) = -1$ si $\#\{i, j, k\} = 3$, $(v_{ij}|v_{kl}) = 0$ si $\#\{i, j, k, l\} = 4$. Soient $1 \leq i, j, k \leq n - 1$ et $i \neq j$. On a

$$(v_{ij}|v'_k) = \begin{cases} m - n + 2 & \text{si } k \in \{i, j\} \\ -2 & \text{si } k \notin \{i, j\} \end{cases} \quad (v_{ij}|v_{kn}) = \begin{cases} -1 & \text{si } k \in \{i, j\} \\ 0 & \text{si } k \notin \{i, j\} \end{cases} \quad (v_{ij}|\check{v}) = m - 2n + 5$$

On en déduit

$$(w_{kn}^0|v_{ij}) = \frac{-2}{m - n + 4}, (w_{kn}^0|\check{v}) = \frac{-(n-1)(n-2)}{m - n + 4}, (\check{v}|\check{v}) = (m - 2n + 5) \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

et en particulier que le sous-espace V_{n-1} est orthogonal à $U_{n-1} \oplus S_{n-1}$. D'autre part, si $1 \leq k \leq n - 1$,

	$(v_{kn} v_{ln})$	$(v_{kn} v'_l)$	$(v'_k v'_l)$
$k = l$	$m - 1$	$2 - n$	$(n - 2)(m - n + 2)$
$k \neq l$	-1	-1	$m - 3n + 8$

On en déduit $(w_{kn}^1|w_{ln}^1) = \alpha$ si $k = l$, β si $k \neq l$, avec

$$\alpha = \frac{(m^2 + (5 - 2n)m - 2)(m - n + 3)}{(m - 2n + 5)(m - n + 4)}, \beta = \frac{-(m - 2n + 7)(m - n + 3)}{(m - 2n + 5)(m - n + 4)}$$

Ainsi la forme quadratique Q_n sur V_n est somme directe de Q_{n-1} et d'une forme quadratique δ_{n-1} , que l'on peut définir pour $m \notin \{n - 4, 2n - 5\}$, de discriminant $(\alpha - \beta)^{n-2}(\alpha + (n - 2)\beta)$ soit

$$\frac{(m + 1)^{n-2}(m - n + 3)^{n-1}(m - 2n + 3)}{(m - n + 4)^{n-2}(m - 2n + 5)}$$

Comme $Q_n = Q_{n-1} \oplus \delta_{n-1}$, et que Q_2 est la forme quadratique sur la droite engendrée par v_{12} de discriminant $m - 1$, on en déduit par une récurrence facile

Proposition 16. *Pour W de type A_{n-1} avec $n \geq 3$, le discriminant de la forme quadratique $(|)$ est*

$$(m + 1)^{\frac{n(n-3)}{2}}(m - n + 3)^{n-1}(m - 2n + 3)$$

et cette forme quadratique est définie positive ssi $m > 2n - 3$.

La condition de définie positivité provient de la remarque générale sur $(|)$ lors de sa définition (section 3.2).

8. ÉTUDE DU TYPE D_n

8.1. Généralités. On suppose $n \geq 4$, et que W est de type D_n . Notons $(i j)$ et $(i j)'$ les réflexions respectivement définies par

$$\begin{aligned} (i j) & : (z_1, \dots, z_i, \dots, z_j, \dots, z_n) \mapsto (z_1, \dots, z_j, \dots, z_i, \dots, z_n) \\ (i j)' & : (z_1, \dots, z_i, \dots, z_j, \dots, z_n) \mapsto (z_1, \dots, -z_j, \dots, -z_i, \dots, z_n) \end{aligned}$$

v_{ij} et v'_{ij} , t_{ij} , t'_{ij} les vecteurs de base et les générateurs correspondant respectivement à $(i j)$ et $(i j)'$. L'action est alors décrite par les formules

$$\begin{cases} t_{ij} \cdot v_{kl} = v_{kl} \\ t_{ij} \cdot v_{jk} = v_{ik} - v_{ij} \\ t_{ij} \cdot v_{ij} = mv_{ij} \\ t_{ij} \cdot v'_{kl} = v'_{kl} \\ t_{ij} \cdot v'_{jk} = v'_{ik} - v_{ij} \\ t_{ij} \cdot v'_{ij} = v'_{ij} \end{cases} \quad \begin{cases} t'_{ij} \cdot v_{kl} = v_{kl} \\ t'_{ij} \cdot v_{jk} = v'_{ik} - v'_{ij} \\ t'_{ij} \cdot v_{ij} = v_{ij} \\ t'_{ij} \cdot v'_{kl} = v'_{kl} \\ t'_{ij} \cdot v'_{jk} = v_{ik} - v'_{ij} \\ t'_{ij} \cdot v'_{ij} = mv'_{ij} \end{cases}$$

où i, j, k, l désignent des indices distincts. On note $V_n = V$ l'espace vectoriel sous-jacent engendré par les v_{ij} et v'_{ij} , et $\mathcal{T}_n^D = \mathfrak{g}$ est engendrée par les t_{ij} et t'_{ij} . On considère $\mathcal{T}_{n-1}^D \subset \mathcal{T}_n^D$, correspondant au sous-groupe parabolique maximal \widetilde{W} engendré par les $(i j)$, $(i j)'$ pour $1 \leq i, j \leq n-1$, et $V_{n-1} \subset V_n$ la représentation associée.

8.2. Restriction à \mathcal{T}_{n-1}^D . On définit, pour tout $1 \leq k \leq n-1$,

$$u_k = \sum_{\substack{i \leq n-1 \\ i \neq k}} v_{ik} + v'_{ik}, u = \sum_{\{r,s\} \subset [1,n-1]} v_{rs} + v'_{rs}, w_k = v'_{kn} - v_{kn}$$

et $q_k = (4n - m - 11)(2n - m - 9)(v_{kn} + v'_{kn}) - 2(4n - m - 11)u_k + 8u$. Alors

$$\begin{cases} t_{ij} \cdot q_k = t'_{ij} \cdot q_k = q_k \\ t_{ij} \cdot q_j = t'_{ij} \cdot q_j = q_i \end{cases} \quad \begin{cases} t_{ij} \cdot w_k = w_k, & t'_{ij} \cdot w_k = w_k \\ t_{ij} \cdot w_j = w_i, & t'_{ij} \cdot w_j = -w_i \end{cases}$$

où i, j, k sont distincts et compris entre 1 et $n-1$. Si $m \notin \{4n-11, 2n-9\}$, on a une décomposition en somme directe de \mathcal{T}_{n-1}^D -modules, irréductibles pour m générique, $V_n = V_{n-1} \oplus U_{n-1}^D \oplus U_{n-1}^A \oplus S_{n-1}$ avec

Sous-espaces	Dimension
$V_{n-1} = \langle v_{ij}, v'_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n-1 \rangle$	$\#\widetilde{\mathcal{R}}$
$U_{n-1}^D = \langle w_k \mid 1 \leq k \leq n-1 \rangle$	$n-1$
$U_{n-1}^A = \langle q_k - q_{k+1} \mid 1 \leq k \leq n-2 \rangle$	$n-2$
$S_{n-1} = \langle q_1 + \cdots + q_{n-1} \rangle$	1

On remarque que l'espace $U_{n-1}^A \oplus S$ est l'intersection des noyaux des $t_{ij} - t'_{ij}$, pour $1 \leq i, j \leq n-1$. D'autre part U_{n-1}^D est la représentation de Bureau infinitésimale de type D_{n-1} , et U_{n-1}^A est la représentation de Bureau infinitésimale de type A_{n-2} , étendue à \mathcal{T}_{n-1}^D par le morphisme d'algèbres de Lie $\mathcal{T}_{n-1}^D \rightarrow \mathcal{T}_{n-1}$ défini par $t_{ij}, t'_{ij} \mapsto t_{ij}$.

8.3. Forme quadratique. La forme quadratique est définie par $(v_{ij}|v_{ij}) = (v'_{ij}|v'_{ij}) = m-1$, $(v_{ij}|v_{kl}) = (v_{ij}|v'_{kl}) = (v'_{ij}|v'_{kl}) = 0$, $(v_{ij}|v'_{ij}) = 0$ et $(v_{ij}|v_{jk}) = (v_{ij}|v'_{jk}) = (v'_{ij}|v'_{jk}) = -1$ si $\#\{i, j, k, l\} = 4$.

On constate facilement que $(w_k|w_k) = 2(m-1)$ et $(w_i|w_j) = 0$ si $i \neq j$. On en déduit que le discriminant de $(|)$ sur U_{n-1}^D est $2^{n-1}(m-1)^{n-1}$. La restriction de $(|)$ sur $U_{n-1}^A \oplus S$ est donnée par $(q_k|q_k) = \alpha$, $(q_i|q_j) = \beta$ si $i \neq j$, avec

$$\begin{aligned} \alpha &= -2(m-2n+9)(4n+4nm-12m-3-m^2)(m-4n+11)(m-2n+7) \\ \beta &= -4(m-2n+9)(m-2n+7)(m-4n+15)(m-4n+11) \end{aligned}$$

donc son discriminant est $(\alpha - \beta)^{n-2}(\alpha + (n-2)\beta)$, avec

$$\begin{aligned}\alpha - \beta &= 2(m+3)(m-2n+7)(m-2n+9)(m-4n+11)^2 \\ \alpha + (n-2)\beta &= 2(m-4n+7)(m-2n+7)(m-4n+11)(m-2n+9)^2\end{aligned}$$

On en déduit comme pour le type A, par une récurrence facile, que

Proposition 17. *En type D_n , $n \geq 3$, le discriminant de la forme quadratique (\mid) vaut*

$$(m-4n+7)(m-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(m+3)^{\frac{n(n-3)}{2}}(m-2n+7)^{n-1}$$

et elle est définie positive ssi $m > 4n - 7$.

RÉFÉRENCES

- [Bi] S. Bigelow, *Braid groups are linear*, J. Am. Math. Soc. **14**, 471-486 (2001).
- [BW] J.S. Birman, H. Wenzl, *Braids, Link polynomials and a new algebra*, Trans. AMS **313** 249-273 (1989).
- [Bor] A. Borel, *Linear algebraic groups. Second edition.*, Graduate Texts in Mathematics 126, Springer-Verlag, New-York, 1991.
- [Bou] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie, chapitres 4,5,6*, Hermann, 1968.
- [Br] E. Brieskorn, *Die Fundamentalgruppe des Raumes der regulären Orbits einer endlichen komplexen Spiegelungsgruppe*, Invent. Math. **12** (1971), 57-61.
- [BM] M. Broué, G. Malle *Zyctotomische Heckealgebren*, Astérisque **212**, 7-92 (1993).
- [BMR] M. Broué, G. Malle, R. Rouquier, *Complex reflection groups, braid groups, Hecke algebras*, J. Reine Angew. Math. **500** (1998), 127-190.
- [Bu] R. Budney, *On the image of the Lawrence-Krammer representation*, J. Knot Theory Ramifications **14** (2005), no. 6, 773-789.
- [Ch] I. Cherednik, *Calculation of the monodromy of some W -invariant local systems of type B, C and D* , Funktsional. Anal. i Prilozhen. **24** (1990), no. 1, 88-89, traduction anglaise Funct. Anal. Appl. **24** (1990), no. 1, 78-79.
- [CW] A.M. Cohen, D.B. Wales, *Linearity of Artin groups of finite type*, Israel J. Math. **131**, 101-123 (2002).
- [CGW] A.M. Cohen, D.A.H. Gijssbers, D.B. Wales, *BMW Algebras of simply laced type*, J. Algebra **286**, No. 1, 107-153 (2005).
- [CH] Y. de Cornulier, P. de la Harpe, *Décompositions de groupes par produit direct et groupes de Coxeter*, arXiv:math.GR/0507366
- [Cr] J. Crisp, *Injective maps between Artin groups*, p. 119-137 in *Geometric group theory down under*, De Gruyter, 1999.
- [CP] J. Crisp, L. Paris, *The solution to a conjecture of Tits on the subgroup generated by the squares of the generators of an Artin group*, Invent. Math. **145**, 19-36 (2001).
- [D] F. Digne, *On the linearity of Artin braid groups*, J. Algebra **268**, No.1, 39-57 (2003).
- [Dr] V.G. Drinfel'd, *On quasitriangular quasi-hopf algebras and a group closely connected with $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$* , Leningrad Math. J. **2** No. 4, 829-860 (1991).
- [En] B. Enriquez, *Quasi-reflection algebras, multiple polylogarithms at roots of 1, and analogues of the group GT* , prépublication arXiv:math.QA/0408035.
- [FR] M. Falk, R. Randell, *Pure braid groups and products of free groups*, in *Braids*, Contemporary Mathematics **78**, 217-228, A.M.S., Providence, 1988.
- [Ko] T. Kohno, *Série de Poincaré-Koszul associée aux groupes de tresses pures*, Invent. Math. **82**, 57-76 (1985).
- [Kr] D. Krammer, *Braid groups are linear*, Annals of Math. **155**, 131-156 (2002).
- [La] R. Lawrence, *Homological representations of the Hecke algebras*, Commun. Math. Physics **135**, 141-191 (1990).

- [LX] G. Lehrer, N. Xi, *On the injectivity of the braid group in the Hecke algebra*, Bull. Austral. Math. Soc. **64**, no. 3, 487–493 (2001).
- [LM] A. Leibman, D. Markushevich, *The monodromy of the Brieskorn Bundle*, Geometric topology (Haifa, 1992), 91–117, Contemp. Math., 164, Amer. Math. Soc., Providence, 1994.
- [Lo] D.D. Long, *A note on the normal subgroups of mapping class groups*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **99**, no. 1, 79–87 (1986).
- [Ma1] I. Marin, *Représentations linéaires des tresses infinitésimales*, thèse de l’université Paris XI-Orsay, 2001.
- [Ma2] I. Marin, *Quotients infinitésimaux du groupe de tresses*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **53** No. 5, 1323–1364 (2003).
- [Ma3] I. Marin, *Irréductibilité générique des produits tensoriels de monodromies*, Bull. Soc. Math. Fr. **132** 201–232 (2004).
- [Ma4] I. Marin, *Monodromie algébrique des groupes d’Artin diédraux*, prépublication [arXiv:math.RT/0502115](https://arxiv.org/abs/math/0502115), à paraître au J. Algebra.
- [Ma5] I. Marin, *On the representation theory of braid groups*, prépublication [arXiv:math.RT/0502118](https://arxiv.org/abs/math/0502118) (v2).
- [Ma6] I. Marin, *L’algèbre de Lie des transpositions*, prépublication [arXiv:math.RT/0502119](https://arxiv.org/abs/math/0502119) (v2).
- [Ma7] I. Marin, *On the residual nilpotence of pure Artin groups*, prépublication [arXiv:math.GR/0502120](https://arxiv.org/abs/math/0502120), à paraître au J. Group Theory.
- [MT] J.J. Millson, V. Toledano Laredo, *Casimir operators and monodromy representations of generalised braid groups*, Transform. Groups **10** no. 2, 217–254 (2005).
- [OT] P. Orlik, H. Terao, *Arrangements of hyperplanes*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 300, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [PP] L. Paoluzzi, L. Paris, *A note on the Lawrence-Krammer-Bigelow representation*, Algebr. Geom. Topol. **2**, 499–518 (2002).
- [Par] L. Paris, *Artin groups of spherical type up to isomorphisms*, J. Algebra **281**, 666–678 (2004).
- [Pas] D.S. Passman, *The algebraic structure of group rings*, Wiley, 1977.
- [Pl] V.P. Platonov, *The Frattini subgroup and finite approximability*, Soviet. Math. Dokl. **7**, 1557–1560 (1966).
- [Z] M. Zinno, *On Krammer’s representations of the braid group*, Math. Ann. **321**, 197–211 (2001).

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE JUSSIEU, 175 RUE DU CHEVALERET, F-75013 PARIS

E-mail address: marin@math.jussieu.fr

URL: <http://www.math.jussieu.fr/marin>