

Mémoire d'habilitation

**REPRÉSENTATIONS LINÉAIRES
DES
GROUPES DE TRESSES COMPLEXES**

Ivan Marin

Table des matières

Chapitre 1. Introduction	5
1. Une correspondance infinitésimal $\leftrightarrow$ global	6
2. L'algèbre de Lie des transpositions	7
3. Théorie des groupes	8
4. Remerciements	10
Chapitre 2. Représentations de monodromie	11
1. Introduction	11
2. Préliminaires	12
3. Propriétés générales	13
4. Unitarité	14
5. Restriction aux paraboliques	15
6. Agrégeance	16
7. Caractères du groupe de Grothendieck-Teichmüller	17
Chapitre 3. Algèbres d'Iwahori-Hecke infinitésimales	19
1. Introduction	19
2. Sous-algèbres de Lie de l'algèbre de groupe	20
3. Structure des algèbres infinitésimales	21
4. Formes compactes	23
5. Algèbres infinitésimales à plusieurs paramètres	24
Chapitre 4. Représentations des groupes de réflexions	27
1. Corps de définition	27
2. Actions galoisiennes	27
3. Automorphismes des groupes de réflexions complexes	28
4. Arrangements de réflexions et systèmes de racines	29
5. Propriétés de branchement parabolique	31
Chapitre 5. Représentations de Krammer	35
1. Introduction	35
2. Définition	36
3. Généralisation aux groupes de réflexions complexes	37
4. Zariski-densité et applications	39
5. Propriétés résiduelles	40
6. Applications en théorie des noeuds	43

CHAPITRE 1

Introduction

Ce mémoire d'habilitation se concentre sur une série de travaux, pour certains amorcés dès la fin de ma thèse, mais dont l'achèvement est récent. Ils concernent tous les représentations linéaires des groupes de tresses complexes. Dans ce mémoire, cette expression désignera la notion suivante.

Soit E un espace vectoriel complexe, toujours supposé de dimension finie. À un groupe fini d'endomorphismes $W < \mathrm{GL}(E)$ engendré par des pseudo-réflexions, c'est-à-dire des endomorphismes qui fixent un hyperplan de E , est associée la collection $\mathcal{A}$ des hyperplans correspondants, ainsi que deux variétés naturelles : le complémentaire $X = E \setminus \bigcup \mathcal{A}$ et son quotient X/W . Les groupes fondamentaux $P = \pi_1(X)$ et $B = \pi_1(X/W)$ leur sont naturellement associés, et on appellera B un groupe de tresses complexe. Si $W = \mathfrak{S}_n < \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ (c'est-à-dire « en type A »), B est le groupe de tresses ordinaire sur n brins ; si plus généralement $W < \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un groupe de réflexions réel, c'est-à-dire un groupe de Coxeter fini, B est ce que l'on appelle aujourd'hui un groupe d'Artin-Tits de type sphérique, ou de type de Coxeter fini. En général, un tel groupe W se décompose naturellement en $W_1 \times \cdots \times W_r$, avec $W_r < \mathrm{GL}(E_r)$, $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_r$ et W_i agissant irréductiblement sur E_i . Alors B (resp. P) se décompose naturellement en produit direct des B_i (resp. P_i) correspondants. Si $r = 1$ on dit que W est *irréductible*, ce que l'on peut supposer la plupart du temps. Les groupes W irréductibles ont été classifiés en 1956 par Shephard et Todd (voir [ST]). Outre 34 exceptions, numérotées de G_4 à G_{37} , on y trouve une série infinie $G(de, e, r)$ à 3 paramètres entiers, formée des groupes de matrices monomiales $r \times r$, dont les coefficients non nuls sont des racines de -ième de 1, et ont pour produit une racine d -ième de 1.

Du revêtement galoisien $X \rightarrow X/W$ on déduit une suite exacte fondamentale $1 \rightarrow P \rightarrow B \rightarrow W \rightarrow 1$. La théorie homotopique de X et X/W , qui sont des $K(\pi, 1)$, se réduit à la connaissance de B . La théorie homologique de X fournit quant à elle une algèbre de Lie d'holonomie, notée $\mathcal{T}$, et un produit semidirect $\mathfrak{B} = \mathbb{C}W \ltimes \mathcal{T}$, qui sont des analogues infinitésimaux des groupes P et B . L'avantage de ces analogues infinitésimaux est que leur structure est souvent plus facile à décrire que les groupes fondamentaux correspondants.

Nous renvoyons aux introductions des chapitres suivants pour une présentation synthétique des différentes problématiques abordées. Elles sont organisées dans ce mémoire de la façon suivante

- (1) établissement de résultats généraux sur la correspondance « monodromique » utilisée ici, et ses prolongement naturels.

- (2) structures nouvelles et résultats obtenus sur les représentations les plus classiques, celles des algèbres de Hecke.
- (3) contributions à l'étude des représentations du quotient naturel W de B , c'est-à-dire des groupes de réflexions complexes.
- (4) une nouvelle famille de représentations linéaires et applications en théorie des groupes.

A un niveau plus personnel, la genèse des travaux présentés ici est la rencontre de plusieurs histoires. Leur récit apportera je l'espère un éclairage complémentaire sur les motivations de ces travaux, ainsi que sur les difficultés rencontrées.

1. Une correspondance infinitésimal $\leftrightarrow$ global

La théorie des systèmes de Knizhnik-Zamolodchikov (KZ) généralisés permet d'associer à toute représentation linéaire φ de $\mathcal{T}$ une représentation de P , et à toute représentation linéaire de $\mathfrak{B}$ une représentation de B . Cette correspondance s'opère par monodromie de systèmes différentiels à singularités « fuchsiennes ». Dès ma thèse (vers 1998-1999) je me suis intéressé, pour $W = \mathfrak{S}_n$, à la possibilité d'étudier les propriétés des représentations de B obtenues de cette manière sans avoir à les calculer (ce calcul étant en général impossible). Pour ce faire, il est nécessaire d'introduire un paramètre formel (afin d'éviter les cas de non-semisimplicité dans la théorie des équations fuchsiennes) : à une représentation φ à coefficients complexes on associe une représentation R de P ou B à coefficients dans l'anneau des séries formelles $A = \mathbb{C}[[h]]$, ou de son corps des fractions $K = \mathbb{C}((h))$.

Ce point de vue permet d'obtenir un certain nombre de résultats sur les représentations du groupe de tresses ordinaires. Il suggère aussi que certaines propriétés, comme l'unitarité de certaines représentations, est liée à des propriétés algébriques de la représentation « infinitésimale » φ . Il est à cet égard utile, toujours pour $W = \mathfrak{S}_n$, de remplacer le processus de monodromie « transcendante » offert par les systèmes KZ, par des méthodes de monodromie « rationnelle » permises par la théorie des associateurs de Drinfeld. De ce point de vue j'ai donné une synthèse (vers 2001-2002, complétée en 2005) dans [2].

Du fait de l'environnement dans lequel j'avais fait ma thèse et mon DEA, je m'étais par ailleurs intéressé aux groupes de Grothendieck-Teichmüller, dont les différentes versions forment des groupes d'automorphismes de certaines complétions des groupes de tresses ordinaires. En 2002 j'ai rencontré à Heidelberg, avec M. Dettweiler, la thématique des systèmes locaux rigides, qui produisent des représentations des groupes de tresses ordinaires, vus comme groupes d'automorphismes d'un groupe libre. L'analogie était alors tentante, et j'ai montré en 2004 comment obtenir des caractères de groupes de Grothendieck-Teichmüller à partir de représentations « GT »-rigides du groupe de tresses ordinaires. Ce travail a été prolongé en 2006, par l'amorce d'un analogue « profini » de la même approche, à l'occasion d'une conférence commune avec P. Lochak et L. Schneps organisé par C. Kapoudjian.

Pour de telles applications, il était nécessaire de recourir à la théorie des associateurs de Drinfeld. Quand j'ai étendu mon intérêt aux groupes d'Artin-Tits, en fréquentant les « journées tresses », et notamment à la suite de l'extension par F. Digne et A. Cohen-D.

Wales de la représentation de Krammer aux groupes d'Artin-Tits de type ADE, j'ai travaillé un temps sur la possibilité d'obtenir des structures similaires aux associateurs de Drinfeld pour des groupes de tresses généralisées, qui admettraient des points rationnels – permettant ainsi une opération de « monodromie rationnelle » dans ce cadre. Je suis parvenu à un résultat positif pour les groupes d'Artin diédraux, et simultanément B. Enriquez l'obtenait pour les groupes d'Artin de type B. Quelques années plus tard, la mise en évidence, lors d'un travail avec J. Michel, de relèvement des actions galoisiennes en des automorphismes du groupe W m'a conforté dans l'idée que de tels morphismes devaient exister.

Néanmoins, pour d'autres applications, il apparaissait moins essentiel d'obtenir des morphismes de monodromie rationnelle vérifiant certaines propriétés agréables que de développer davantage les résultats généraux sur la monodromie « transcendante » habituelle, mais cette fois pour tous les groupes de Coxeter, voire pour tous les groupes de réflexions complexes.

A la suite d'un colloque à Banff en 2004, j'ai cherché à obtenir les représentations de Krammer généralisées comme représentations de monodromie. Les formules obtenues (début 2005) étaient simples et naturelles, mais dépendaient fortement du fait que W soit un groupe de Coxeter de type ADE. Une fois aguerri à la zoologie des groupes de réflexions complexes et de leurs représentations, après deux ans de fréquentation de Jean Michel et un travail commun sur le sujet, j'ai repris ce thème et trouvé une généralisation naturelle de cette construction aux groupes de « vraies » réflexions complexes, ce qui permet la représentation de Krammer à tous les groupes de tresses complexes.

Cette généralisation a des propriétés très similaires à son modèle, notamment pour ce qui concerne les restrictions à des sous-groupes remarquables de B , dits « paraboliques ». Pour les établir, il a fallu démontrer (fin 2007) un théorème général de commutation des opérations de monodromie avec les restrictions naturelles aux paraboliques, ajoutant ainsi une pierre importante à la correspondance infinitésimal $\leftrightarrow$ global qui motivait ces travaux.

2. L'algèbre de Lie des transpositions

Pendant ma thèse, en cherchant un cadre convenable et uniforme aux représentations du groupe de tresses ordinaires qui étaient alors en vogue, j'avais été frappé par le fait que les représentations les plus standards, qui se factorisent par l'algèbre de Hecke associée à $W = \mathfrak{S}_n$ provenaient en fait d'un *morphisme d'algèbres de Lie* de $\mathcal{T}$, ici l'algèbre de Lie « des diagrammes de cordes horizontaux », ou « des tresses infinitésimales pures », de générateurs t_{ij} , $1 \leq i < j \leq n$, vers l'algèbre de groupe $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ considérée comme algèbre de Lie. Il en résultait que ces représentations provenaient d'un « quotient infinitésimal » mystérieux, notamment responsable des décompositions de produits tensoriels des représentations de B qui provenaient de l'algèbre de Hecke. Alors que je lui demandais, un jour de 1999, ce que l'on savait sur l'image de $t_{ij} \mapsto (i\ j)$, P. Cartier me répondit sur un ton désarmant d'évidence que c'était simplement « l'algèbre de Lie engendrée par les transpositions ». Ainsi encouragé dans l'idée qu'il n'était pas totalement absurde d'étudier un tel objet,

j'ai entamé dans ma thèse son étude et ai complètement décomposé cette algèbre de Lie réductive pour de petites valeurs de n .

L'idée de considérer cette même algèbre de Lie dans le cadre des groupes de Coxeter est venue plus tard (2002), avec la fréquentation des « journées tresses », et j'ai parallèlement obtenu le théorème de structure pour le type $W = \mathfrak{S}_n$ fin 2004. Enfin, j'ai commencé à comprendre vers cette époque que la théorie de Chevalley d'exponentiation formelle, malheureusement absente de la plupart des traités modernes sur les groupes algébriques, s'appliquait remarquablement bien aux représentations de monodromie, et permettait d'interpréter les quotients de $\mathcal{T}$ comme les algèbres de Lie des adhérences algébriques de $R(B)$ pour les représentations de monodromie R considérées.

Je me suis enfin attaqué au problème général pour un groupe de Coxeter fini au moment de mon recrutement à Paris 7 en 2005. Il devenait de plus en plus évident que, pour ce problème, les groupes de Coxeter n'avaient rien de particulier parmi les groupes de 2-réflexions complexes. Pour obtenir le théorème de structure, par une démarche inductive similaire à celle utilisée en type A, il était néanmoins nécessaire d'avoir une idée a priori de l'énoncé à démontrer.

Comme les dimensions croissent très vite, il est pour cela nécessaire de disposer d'outils informatiques performants. Avec un ordinateur digne de ce nom sur mon bureau et la tranquillité fournie par un poste permanent, il m'a été possible à partir de 2005 de développer des programmes, en GAP et en C, pour gagner en heuristique. Pour les groupes exceptionnels, l'utilisation des tables de caractères fournie par le package CHEVIE de GAP3, maintenu et constamment développé par J. Michel dans le bureau voisin, était elle aussi indispensable. Pour quelques-uns d'entre eux, les modèles matriciels explicites des représentations stockés informatiquement dans CHEVIE étaient également nécessaires. Enfin, pour deux d'entre eux (G_{24} et G_{27}), il m'a fallu obtenir de tels modèles explicites, non disponibles auparavant, pour décomposer informatiquement l'algèbre de Lie en question.

Ainsi, si le cas des groupes de Coxeter a été assez vite réglé (en 2006), il est apparu que le cas général (des groupes de 2-réflexions) réclamait une étude plus poussée. D'abord bien sûr à cause du nombre important de groupes exceptionnels à étudier, mais surtout à cause d'une complexité combinatoire inattendue dans les règles d'induction des paraboliques maximaux. Il a fallu tout d'abord étudier cette complexité combinatoire en elle-même (2007) pour s'assurer que les multiplicités n'étaient pas trop grandes. Enfin, la démonstration du théorème de structure dans le cas général a été obtenue en 2008. Sa généralisation au cas des groupes de pseudo-réflexions a été faite récemment : bien que le cadre soit plus compliqué, l'essentiel des difficultés combinatoires se concentre sur le cas des groupes de 2-réflexions.

3. Théorie des groupes

Un premier résultat de théorie des groupes date des années de thèse : une nouvelle preuve, indirecte, d'un théorème de I. Zisser démontrant qu'un produit tensoriel de représentations irréductibles du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ n'est « jamais » irréductible.

Parallèlement, lors de mes premiers essais pour décomposer l'algèbre de Lie des transpositions, j'avais été intrigué par une propriété très élémentaire des algèbres de Lie semi-simples : si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie semisimple (complexe), et V une représentation fidèle de $\mathfrak{g}$ telle que $V \otimes V$ admette au plus trois composantes irréductibles, alors $\mathfrak{g}$ est simple. Cette propriété découle simplement du fait qu'une représentation irréductible d'un produit direct est un produit tensoriel de représentations irréductibles de chacun de ses facteurs ; dans le cas des groupes, le même argument montre qu'un produit direct de groupes non abéliens ne peut avoir de représentation fidèle dont le carré tensoriel admette moins de trois représentations irréductibles. Ce furent les prémisses de mon intérêt pour ce domaine.

Lors de mes années d'étude et de thèse, l'étude des groupes discrets infinis, ne m'était en effet pas apparue comme une priorité de la recherche à l'E.N.S. ; le chemin qui m'a mené à des applications en théorie des groupes infinis s'en est trouvé tortueux. Il a démarré en 2001, où mon séjour à l'E.T.H. de Zürich a été l'occasion de changer de perspective, en cotoyant l'école de « géométrie des groupes » suisse ; à cette époque, où je terminais ma thèse, fut démontré le résultat crucial de linéarité du groupe de tresses ordinaire, qui laissait entrevoir un pont entre théorie des représentations et théorie des groupes.

En 2002-2003, j'ai commencé à fréquenter le « GDR tresses », fondé et alors dirigé par P. Dehornoy. Les « journées tresses » organisées par ce GDR étaient un creuset de rencontres, en pleine rupture des frontières existantes entre plusieurs traditions mathématiques. L'un des aspects développés était la théorie alors très neuve des groupes de Garside, et plus généralement un thème fréquemment abordé était celui de la structure des groupes de tresses et de ses généralisations naturelles ; un résultat exposé alors, de L. Paris, était que les groupes d'Artin-Tits de type de Coxeter fini ne peuvent « presque pas » se décomposer en produit direct. D'un autre côté, lors de ces rencontres, un contraste saisissant apparaissait, qui est toujours d'actualité, entre un point de vue « groupes d'Artin-Tits » et un point de vue « mapping class groups ». Ainsi, pour le groupe de tresses ordinaires, le théorème de L. Paris découle d'une propriété de D. Long sur la quantité de pseudo-Anosov que l'on peut trouver dans un sous-groupe normal de groupes modulaires de surfaces (mapping class groups).

En 2004, un autre trajet m'a amené à déterminer l'enveloppe algébrique du groupe de tresses dans la représentation de Krammer. La démonstration montrait aussi que le carré tensoriel de cette représentation admettait deux composantes irréductibles. Comme j'avais déjà rencontré une telle situation, j'en ai déduit une nouvelle preuve du théorème de Paris. A ce moment-là, Y. de Cornulier m'a fait remarquer que la Zariski-densité dans GL_N que j'avais obtenue impliquait directement cette propriété de décomposition du carré tensoriel. Développant davantage les conséquences de la Zariski-densité dans GL_N , cela m'a permis de généraliser la propriété de D. Long à tous les groupes d'Artin-Tits sphériques, et à de nombreux sous-groupes. Plus tard, cette idée de décomposer les produits tensoriels pour obtenir des informations sur le groupe s'est révélée à nouveau utile dans l'étude des automorphismes des groupes de réflexions complexes, devenant ainsi l'idée élémentaire la plus utilisée dans les travaux présentés ici.

Il apparaissait en tout cas que, en étudiant de plus près la représentation utilisée par Krammer, on pouvait obtenir des résultats de théorie des groupes plus fins que les

conséquences générales de la linéarité du groupe. Cela a mené à la deuxième application de cette construction par monodromie. Parmi les problèmes ouverts que posent naturellement les constructions de monodromie, apparaît en effet celui de la résiduelle nilpotence du groupe fondamental $P = \pi_1(X)$, qui était ouverte pour W un groupe de Coxeter. Je me suis alors rendu compte (début 2005) que le fait qu'une représentation de monodromie linéaire soit fidèle impliquait cette résiduelle nilpotence, et en fait celle beaucoup plus forte de résiduelle nilpotence-sans-torsion.

Se posait alors la question naturelle d'étudier la résiduelle nilpotence-sans-torsion de P quand W est un groupe de réflexions complexes. Ces applications m'ont amené à généraliser la représentation de Krammer aux groupes de (2-)réflexions complexes, et en retour à montrer que, si cette représentation est fidèle, alors toutes les propriétés algébriques obtenues ici pour les groupes d'Artin-Tits sphériques sont vraies dans le cadre général.

4. Remerciements

En plus des personnes déjà citées, ces travaux n'auraient bien sûr pas été possibles sans de nombreuses discussions avec de nombreuses autres personnes, dont je ne peux malheureusement faire une liste exhaustive. La plupart se trouvant déjà remerciés dans les articles présentés, je préfère ainsi y renvoyer, et adresser simplement ici un remerciement collectif à tous.

CHAPITRE 2

Représentations de monodromie

1. Introduction

Un groupe de (pseudo-)réflexions complexes fini $W < \mathrm{GL}(E)$ définit un arrangement d'hyperplans dans E , par

$$\mathcal{A} = \{\mathrm{Ker}(s - 1) \mid s \in \mathcal{R}\}$$

où $\mathcal{R}$ désigne l'ensemble des éléments de W qui sont des pseudo-réflexions de E . Le complémentaire $X = E \setminus \bigcup \mathcal{A}$ de cet arrangement et l'espace des orbites X/W sont des variétés algébriques naturellement associées à W . Leurs groupes fondamentaux $P = \pi_1(X)$ et $B = \pi_1(X/W)$ sont les groupes de tresses purs et groupes de tresses associés à W , respectivement. En composant les chemins de telle sorte que $\alpha\beta$ signifie β suivi de α , on a une suite exacte naturelle

$$1 \rightarrow P \rightarrow B \rightarrow W \rightarrow 1.$$

Une structure classique associée à X est son algèbre de Lie d'holonomie $\mathcal{T}$. Dans le cadre des arrangements d'hyperplans, elle admet la présentation suivante, due à Kohno (voir [Ko])

$$\mathcal{T} = \langle t_H, H \in \mathcal{A} \mid [t_{H_0}, t_Z] = 0, H_0 \in \mathcal{A}, Z \subset H_0, \mathrm{codim}_{\mathbb{C}} Z = 2 \rangle$$

où $t_Z = \sum_{H \supset Z} t_H$. Parmi les propriétés algébriques de $\mathcal{T}$, on note qu'elle est graduée, pour la graduation $\deg t_H = 1$, et qu'elle est munie d'une action par automorphismes de W , $w.t_H = t_{w(H)}$. D'un point de vue topologique ou géométrique, ces générateurs t_H doivent être pensés comme les « duaux » des formes logarithmiques $\omega_H = d \log \alpha_H = \frac{d\alpha_H}{\alpha_H}$ associées aux hyperplans $H = \mathrm{Ker} \alpha_H$

Par rapport à sa graduation naturelle, $\mathcal{T}$ admet une complétion $\widehat{\mathcal{T}}$; il en est de même de son algèbre enveloppante, ce qui fournit une algèbre de Hopf complète $\widehat{\mathrm{UT}}$.

A une représentation $\varphi : \mathcal{T} \rightarrow \mathfrak{gl}_N(\mathbb{C})$ est classiquement associée une 1-forme sur X à valeurs dans $\mathfrak{gl}_N(\mathbb{C})$,

$$\omega_\varphi = \sum_{H \in \mathcal{A}} \varphi(t_H) \omega_H$$

qui définit une connexion plate sur le fibré vectoriel trivial $X \times V \rightarrow X$, et ainsi une représentation linéaire $P \rightarrow \mathrm{GL}(V)$.

Si l'on suppose que V est munie d'une représentation ρ de W compatible avec l'action de W sur $\mathcal{T}$, c'est-à-dire $\varphi(t_{w(H)}) = \rho(w)\varphi(t_H)\rho(w^{-1})$, soit encore que (ρ, φ) s'étendent en une représentation de $\mathfrak{B} = \mathbb{C}W \ltimes \mathrm{UT}$, cette construction définit en fait une représentation $B \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ du groupe de tresses.

Comme $\mathcal{T}$ est graduée, les représentations de $\mathcal{T}$ apparaissent en familles à un paramètre : si φ est une représentation de $\mathcal{T}$, il en est de même de $t_H \mapsto h\rho(t_H)$ pour tout $h \in \mathbb{C}$. On montre que les représentations $P \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ ou $B \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ associées varient de façon holomorphe en h , c'est-à-dire que l'on peut associer à φ une représentation universelle $R : P \rightarrow \mathrm{GL}(V \otimes A)$ ou $R : B \rightarrow \mathrm{GL}(V \otimes A)$ à coefficients dans l'anneau $A = \mathbb{C}[[h]]$ des séries formelles en h (ou même dans l'anneau des séries convergentes).

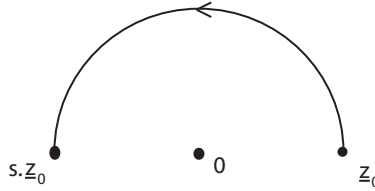
Notant $K = \mathbb{C}((h))$ le corps des fractions de A , une première série de travaux a consisté à étudier les propriétés de cette correspondance $\varphi \rightsquigarrow R$.

Dans ce chapitre, on supposera que W est engendré par de vraies réflexions, bien que la plupart des résultats ne nécessitent pas cette hypothèse, ceci en vue de clarifier l'exposition, qui nécessite moins de notations dans ce cadre. Un phénomène remarquable à garder en tête est par ailleurs que tous les groupes de tresses complexes B apparaissent comme groupe de tresse d'un groupe de 2-réflexions. Le cas des groupes de 2-réflexions est ainsi le cas crucial dans ce type d'étude.

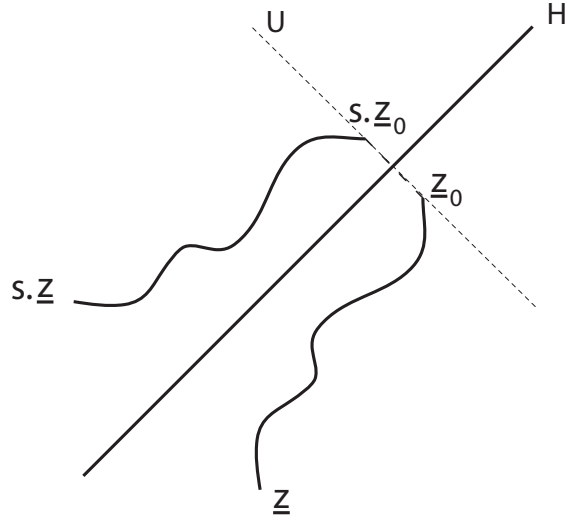
2. Préliminaires

Un résultat de [BMR] est que B est engendré par des *réflexions tressées*. Ces éléments remarquables sont définis comme suit.

Soit $\underline{z} \in X$ le point base choisi, $s \in \mathcal{R}$ une réflexion de W , et $H = \mathrm{Ker}(s - 1) \in \mathcal{A}$ l'hyperplan correspondant. On munit V d'une structure unitaire invariante par W . Si l'on choisit un $\underline{z}_0 \in X$ suffisamment proche de H tel que l'orthogonal U de H en $\underline{z}_0$ ne rencontre $\mathcal{A}$ qu'en H , alors on peut considérer dans U le chemin



et le chemin dans X défini en composant ce chemin dans U avec un chemin quelconque de $\underline{z}$ à $\underline{z}_0$ et avec son image par s



définit une classe dans $\pi_1(X/W, \underline{z}) = B$. Une réflexion tressée est par définition un conjugué d'une telle classe de lacets de X/W .

Ces réflexions tressées engendrent B . D'autre part, la théorie des équations différentielles fuchsienues permet d'établir facilement que, si (ρ, φ) est une paire de représentations de W et $\mathcal{T}$ qui sont compatibles, et σ une réflexion tressée autour de $H = \text{Ker}(s - 1)$, alors $R(\sigma)$ est conjuguée dans $\text{GL}(V \otimes K)$ à

$$\rho(s_H) \exp(i\pi h\varphi(t_H)).$$

On identifie $H_1(X) = \pi_1(X)^{ab}$ au $\mathbb{Z}$ -module libre de base $\mathcal{A}$. Les réflexions tressées ont pour carré un élément de P qui tourne autour de H , c'est-à-dire qui est d'image H dans $H_1(X)$. Plus généralement, si $g \in P$ est d'image H dans $H_1(X)$, on a

$$R(g) \equiv 1 + 2i\pi h\varphi(t_H) \text{ modulo } h^2.$$

Enfin, un dernier résultat général qui nous sera utile ici est que, pour tout $g \in P$, $R(P)$ est inclus dans $\exp(h\varphi(\mathcal{T}) \otimes A)$. Plus précisément, les représentations R de P obtenues par ce procédé se factorisent par des morphismes

$$P \rightarrow \exp \mathcal{T}, B \rightarrow W \ltimes \exp \mathcal{T}$$

qui dépendent uniquement du choix du point-base $\underline{z} \in X$. Pour ces préliminaires, nous renvoyons à la théorie de Chen dans [Cn1, Cn2].

3. Propriétés générales

Des propriétés élémentaires rappelées ci-dessus découlent de façon purement algébrique les propriétés suivantes.

On rappelle que $K = \mathbb{C}((h))$, et l'on note KB l'algèbre de groupe de B sur K . Le premier résultat utile est le suivant (cf. [2, 16]).

THÉORÈME. *Les correspondances $(\rho, \varphi) \rightsquigarrow R$ et $\varphi \rightsquigarrow R$ définissent des foncteurs $UT\text{-mod} \rightarrow KP\text{-mod}$ et $\mathfrak{B}\text{-mod} \rightarrow KB\text{-mod}$ qui sont exacts, commutent à $\oplus, \otimes$ et duaux. Ils sont « pleinement fidèles » et envoient irréductibles sur irréductibles.*

Ici, « pleinement fidèle » signifie $\text{Hom}(F(U), F(V)) = \text{Hom}(U, V) \otimes K$ et les modules considérés sont de dimension finie.

Si V est muni d'une forme bilinéaire, on note $\mathfrak{osp}(V)$ la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$ qui préserve cette forme, et $OSP(V) < GL(V)$ le groupe de ses isométries. Si $\varphi : \mathcal{T} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ est une représentation de $\mathcal{T}$ telle que $\varphi(t_H) \in \mathfrak{osp}(V)$ pour tout H , on a $\varphi(\mathcal{T}) \subset \mathfrak{osp}(V)$. Alors $R(P) \subset \exp h(\mathfrak{osp}(V) \otimes A) \subset OSP(V \otimes K)$. Si de plus $V = V_\rho$ avec (ρ, φ) une paire compatible, on a $R(B) \subset OSP(V)$ dès que $\rho(W) \subset OSP(V)$.

Inversement, par adaptation à ce cadre de la théorie de Chevalley d'exponentiation formelle (voir [Cy]), on obtient le résultat suivant (cf. [7, 16]).

PROPOSITION. *L'adhérence de $R(P)$ pour la topologie de Zariski est un groupe algébrique dont l'algèbre de Lie contient $\varphi(\mathcal{T}) \otimes K$.*

4. Unitarité

Soit (ρ, φ) une paire compatible de représentations de W et $\mathcal{T}$, avec $\rho : W \rightarrow GL(V_\rho)$.

On fixe sur V_ρ une forme bilinéaire symétrique non dégénérée, et on identifie V_ρ à $\mathbb{C}^N$ muni de la forme quadratique standard. Le corps $\mathbb{C}((h))$ admet un automorphisme $\varepsilon : h \mapsto -h$ d'ordre 2 ; on définit le groupe unitaire formel

$$U_N^\varepsilon(K) = \{X \in GL_N(K) \mid X^{-1} = \varepsilon({}^t X)\}.$$

On a alors la proposition suivante (cf. [2, 16]).

PROPOSITION. *Si $\rho(W) \subset O_N(\mathbb{C})$ et, pour tout $H \in \mathcal{A}$, ${}^t\varphi(t_H) = \varphi(t_H)$, alors $R(B) \subset U_N^\varepsilon(K)$.*

Ces propriétés de (ρ, φ) sont notamment vérifiées dans la situation suivante. On suppose que ρ est définie sur $\mathbb{R}$, de sorte que $V_\rho = V_\rho^0 \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{R}$ est muni d'une forme quadratique W -invariante, et l'on suppose que $\varphi(t_H) \in \mathfrak{gl}(V_\rho^0)$ pour tout $H \in \mathcal{A}$. Si l'on identifie V_ρ^0 à $\mathbb{R}^N$ euclidien, les hypothèses précédentes signifient alors que $\rho(W) \subset O_N(\mathbb{R})$ et que, pour tout $H \in \mathcal{A}$, $\rho(t_H)$ est autoadjoint.

On a formulé dans [3] la conjecture suivante.

CONJECTURE 1. *Soit $\mathbb{k}$ un corps de caractéristique 0, et $\mathcal{T}$ l'algèbre de Lie d'holonomie de X définie sur $\mathbb{k}$. Il existe $\Phi : B \rightarrow W \ltimes \exp \widehat{\mathcal{T}}$ tel que, pour toute réflexion tressée σ autour de $H = \text{Ker}(s - 1)$, $\Phi(\sigma)$ soit conjuguée à $s \exp(t_H)$ par un élément de $\exp \widehat{\mathcal{T}}$.*

Cette conjecture est bien sûr équivalente à demander un tel morphisme pour $\mathbb{k} = \mathbb{Q}$. Pour $\mathbb{k} = \mathbb{C}$, un tel morphisme existe toujours par la monodromie universelle mentionnée plus haut. Cette conjecture est une conséquence pour $W = \mathfrak{S}_n$ de l'existence d'associateurs de Drinfeld rationnels. L'extension de la théorie des associateurs de Drinfeld due à B. Enriquez dans [En] montre qu'elle est vraie aussi pour le groupe hyperoctaédral $G(2, 1, n) = \mathbb{Z}/2 \wr \mathfrak{S}_n$ (c'est-à-dire quand B est le groupe d'Artin de type B_n), et plus

généralement pour W le groupe de pseudo-réflexions complexes $G(d, 1, r)$. On a montré dans [3] le résultat suivant.

THÉOREME. *La conjecture 1 est vraie pour les groupes diédraux.*

Une autre source d'inspiration pour cette conjecture provient du fait que X comme X/W sont en fait définis sur $\mathbb{Q}$, et que cela découle de la possibilité de relèvement les actions galoisiennes sur les représentations de W en des automorphismes du groupe, comme nous le montrerons plus tard.

Une conséquence de cette conjecture, pour $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, est qu'un tel Φ permettrait d'associer à une paire (ρ, φ) comme ci-dessus une représentation $R : B \rightarrow U_N^\varepsilon(A_0)$, où $A_0 = \mathbb{R}[[h]]$.

En combinant des arguments algébriques de théorie des corps et le théorème d'approximation de M. Artin (voir [Art]), on a montré

PROPOSITION. *Si $R : B \rightarrow U_N^\varepsilon(A_0)$, alors pour tout $n \geq 1$ il existe $R_n : B \rightarrow U_N^\varepsilon(A_0)$ et $\alpha_n > 0$ telle que, pour tout $b \in B$, $R(b) \equiv R_n(b)$ modulo h^n et $R(b)$ converge pour $|h| < \alpha_n$.*

Ces résultats s'utilisent de la façon suivante. Une telle paire (ρ, φ) étant donnée, la représentation R associée, par exemple supposée semisimple, est souvent déterminée à isomorphisme près par sa réduction modulo h^n . Lorsque la conjecture est vraie, on peut vérifier de cette façon que, d'une part elle est à isomorphisme près déduite de Φ , et d'autre part qu'elle est isomorphe à une représentation $R_n : B \rightarrow U_N^\varepsilon(A_0)$ qui converge au voisinage de 0. Les spécialisations en h imaginaire pur fournissent alors des représentations unitaires de B . Ces résultats expliquent ainsi a priori l'unitarisabilité pour B des représentations de l'algèbre de Hecke (pour W Coxeter) établie au chapitre suivant, pour q proche de 1.

Cet exemple montre inversement que l'on ne peut espérer de tels résultats généraux sur l'anneau des séries convergentes, car les représentations de l'algèbre de Hecke ne sont pas unitarisables en général pour toute valeur de q de module 1.

5. Restriction aux paraboliques

Soit W_0 un parabolique de W , c'est-à-dire un sous-groupe de W qui fixe un sous-espace vectoriel I de E . Un théorème de Steinberg assure que W_0 est un groupe de réflexions complexes, d'ensemble de réflexions $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R} \cap W_0$. En particulier, on a une inclusion naturelle $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$, où $\mathcal{A}_0$ désigne l'arrangement d'hyperplans de W_0 . Plus précisément, $\mathcal{A}_0 = \{H \in \mathcal{A} \mid H \supset I\}$.

Soit $\mathcal{T}_0$ l'algèbre de Lie d'holonomie associée à W_0 . A partir des définitions, on montre dans [16] la propriété suivante.

PROPOSITION. *L'inclusion $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ induit un morphisme d'algèbres de Lie $\mathcal{T}_0 \rightarrow \mathcal{T}$ défini par $t_H \mapsto t_H$, qui est W_0 -équivariant et injectif.*

Dans [BMR] sont définis des sous-groupes $B_0 < B$ et $P_0 < P$ associés aux paraboliques $W_0 < W$. Ces sous-groupes sont bien définis à conjugaison près par P . Une question naturelle est donc de savoir si l'opération de monodromie commute, à isomorphisme de

représentations près, aux restrictions de $\mathcal{T}$ à $\mathcal{T}_0$ et de P à P_0 — et la question analogue pour $\mathfrak{B}$ et B . On note $\mathfrak{B}_0 = \mathbb{C}W_0 \ltimes \mathcal{UT}_0$, qui est une sous-algèbre de $\mathfrak{B}$ par la proposition précédente.

Le résultat suivant, démontré dans [16], donne une réponse positive à cette question. Il permet donc, par exemple, de comprendre de façon géométrique le phénomène de « commutation aux paraboliques » observé pour les algèbres de Hecke (l'algèbre de Hecke d'un parabolique est isomorphe à l'algèbre de Hecke parabolique correspondante), et s'applique bien sûr à d'autres cadres. Le cas où W est $\mathfrak{S}_n$ et W_0 un parabolique maximal standard $\mathfrak{S}_{n-1} < \mathfrak{S}_n$ était connu depuis la thèse de J. González-Lorca [GL].

THÉORÈME. *Soit (ρ, φ) une représentation de $\mathfrak{B}$, (ρ_0, φ_0) sa restriction à $\mathfrak{B}_0$, et R, R_0 les représentations de R et R_0 associées. Alors R_0 est isomorphe à la restriction de R à $B_0 < B$.*

6. Agrégeance

Si $R : P \rightarrow \mathrm{GL}_N(K)$ correspond à une représentation φ de $\mathcal{T}$, on construit pour tout $\alpha \in \mathbb{C}^\times$ une représentation $R_\alpha : P \rightarrow \mathrm{GL}_N(K)$ déduite de R par l'automorphisme $h \mapsto \alpha h$ de K . La notion suivante est introduite dans [1].

Soit $\mathcal{D} \subset \mathcal{UT}$ une sous-algèbre associative unifère engendrée par des éléments de degré 1. On dit que $\rho : \mathcal{T} \rightarrow \mathfrak{gl}_N(\mathbb{C})$ est *agrégante relativement à $\mathcal{D}$* si $\rho(\mathcal{D})$ est une sous-algèbre *commutative maximale* de $\mathrm{Mat}_N(\mathbb{C})$. Dans [1] est mis en évidence le phénomène « d'irréductibilité générique » suivant.

THÉORÈME. *Si $\varphi^1, \dots, \varphi^r$ sont des représentations irréductibles de $\mathcal{T}$ qui sont agrégantes relativement à $\mathcal{D}$, alors, pour $(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{C}^r$ en dehors d'un nombre fini d'hyperplans, la représentation $R_{\alpha_1}^1 \otimes \dots \otimes R_{\alpha_r}^r$ de P est irréductible.*

Un exemple typique d'un tel $\mathcal{D}$ est associé à une suite décroissante de paraboliques $W_i < W_{i+1}$. Si l'on note $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{A}_{i+1}$ et $\mathcal{T}_i < \mathcal{T}_{i+1}$ les arrangements d'hyperplans et algèbre d'holonomie correspondants, les éléments $T_i = \sum_{H \in \mathcal{A}_i} t_H$ commutent entre eux, et la collection des T_i engendre dans $\mathcal{UT}$ une algèbre $\mathcal{D}$ convenable.

Une application notable pour $W = \mathfrak{S}_n$ consiste à considérer les représentations les plus classiques du groupe de tresses ordinaire à n brins, celles de l'algèbre de Hecke ou de l'algèbre de Birman-Wenzl-Murakami (par exemple la représentation de Burau réduite, ou la représentation de Krammer). On peut vérifier que, pour un $\mathcal{D}$ comme ci-dessus, elles proviennent par monodromie de représentations agrégantes. Le résultat ci-dessus dit alors que, pour des valeurs génériques, à priori différentes, des paramètres de définitions (typiquement $q_1 = e^{\alpha_1 h}, \dots, q_r = e^{\alpha_r h}$), les produits tensoriels de telles représentations sont toujours irréductibles.

Ces résultats donnent une explication a priori à un phénomène d'irréductibilité « générique » des produits tensoriels de représentations du groupe de tresses ordinaires, dont un cas particulier apparaît notamment dans [AF].

$$\begin{array}{ccccc}
1 & & 1 & & 1 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\widehat{\mathrm{GT}}_1 & \twoheadrightarrow & \mathrm{GT}_1^\ell & \hookrightarrow & \mathrm{GT}_1(\mathbb{Q}_\ell) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\widehat{\mathrm{GT}} & \twoheadrightarrow & \mathrm{GT}^\ell & \hookrightarrow & \mathrm{GT}(\mathbb{Q}_\ell) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\widehat{\mathbb{Z}}^\times & \twoheadrightarrow & \mathbb{Z}_\ell^\times & \hookrightarrow & \mathbb{Q}_\ell^\times \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
1 & & 1 & & 1
\end{array}$$

FIG. 1. Compatibilité entre les versions de GT

7. Caractères du groupe de Grothendieck-Teichmüller

On suppose que $W = \mathfrak{S}_n$, auquel cas B est le groupe de tresses ordinaires à n brins. Le groupe de Grothendieck-Teichmüller se décline en plusieurs versions $\mathrm{GT}(\mathbb{k})$ (pro $\mathbb{k}$ -unipotente), GT^ℓ (pro- ℓ) et $\widehat{\mathrm{GT}}$ (profinie), pour lesquelles nous renvoyons à [Dr]. On a des morphismes naturels

$$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q}) \hookrightarrow \widehat{\mathrm{GT}} \twoheadrightarrow \mathrm{GT}^\ell \hookrightarrow \mathrm{GT}(\mathbb{Q}_\ell).$$

et un morphisme naturel $\widehat{\mathrm{GT}} \twoheadrightarrow \widehat{\mathbb{Z}}^\times$ qui étend le caractère cyclotomique de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q})$. Notant $\widehat{\mathrm{GT}}_1 = \mathrm{Ker}(\widehat{\mathrm{GT}} \twoheadrightarrow \widehat{\mathbb{Z}}^\times)$, on a le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & \longrightarrow & \widehat{\mathrm{GT}}_1 & \longrightarrow & \widehat{\mathrm{GT}} & \longrightarrow & \widehat{\mathbb{Z}}^\times \longrightarrow 1 \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \parallel \\
1 & \longrightarrow & \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q}(\mu_\infty)) & \longrightarrow & \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q}) & \longrightarrow & \widehat{\mathbb{Z}}^\times \longrightarrow 1
\end{array}$$

On a de même des versions GT_1^ℓ et $\mathrm{GT}_1(\mathbb{Q}_\ell)$ définies de façon similaires. La compatibilité entre ces versions est assurée par la commutativité des diagrammes de la figure 1.

Les groupes de Grothendieck-Teichmüller apparaissent par ailleurs comme des groupes d'automorphismes de complétions des groupes de tresses à n brins. En utilisant cette idée, et la « rigidité » des représentations classiques du groupe de tresses sous l'action de ces groupes, le formalisme précédent a permis de définir dans [4] des caractères multiplicatifs (non triviaux, et indépendants)

$$\chi_d : \mathrm{GT}_1(\mathbb{Q}_\ell) \rightarrow \mathbb{Q}_\ell[[h]]^\times, \quad d \geq 2,$$

naturellement associées aux représentations de B qui se factorisent par l'algèbre de Hecke de type A .

Ces caractères restent en grande partie mystérieux. D'un point de vue arithmétique, on a montré dans [4] que, pour $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q}(\mu_{\ell^\infty}))$ et $\bar{\sigma}$ son image dans $\text{GT}_1(\mathbb{Q}_\ell)$, on avait

$$\chi_d(\bar{\sigma}) = 1 - 8\kappa_3^*(\sigma)dh^3 - \frac{8}{3}\kappa_5^*(\sigma)d(1+2d^2)h^5 + \dots$$

où $\kappa_m^*(\sigma) = \kappa_m(\sigma)/(\ell^{m-1} - 1)$ et κ_m désigne un caractère à valeurs dans $\mathbb{Z}_\ell$, appelé le m -ième caractère de Soulé (cf. [IS] pour une définition élémentaire).

Cette approche permet en particulier d'étendre a priori les caractères κ_3 , κ_5 au groupe de Grothendieck-Teichmüller GT_1^ℓ . Il paraît probable que les coefficients suivants permettent d'étendre tous les κ_m , ce qui permettrait de donner une démonstration a priori de ce fait (déjà connu par d'autres méthodes).

Dans [5] j'ai montré dans un cas élémentaire qu'un autre objet arithmétique, le 1-cocycle de Kummer $\rho_2 : \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q}) \rightarrow \widehat{\mathbb{Z}}$ défini après plongement de $\overline{\mathbb{Q}}$ dans $\mathbb{C}$ par

$$\sigma(\sqrt[n]{2}) = \zeta_n^{\rho_2(\sigma)} \sqrt[n]{2}$$

où $\zeta_n = \exp(2i\pi/n)$, s'étend à $\widehat{\text{GT}}$ par un argument similaire de rigidité de représentations du groupe de tresses. Cela donne ainsi une autre démonstration de ce résultat, originellement dû à Nakamura et Schneps [NS].

CHAPITRE 3

Algèbres d'Iwahori-Hecke infinitésimales

1. Introduction

L'algèbre d'Iwahori-Hecke d'un groupe réductif fini de type de Lie sur le corps $\mathbb{F}_q$ peut se définir à partir du groupe de Weyl. Si une présentation de Coxeter de ce groupe est fixée, on obtient une présentation de l'algèbre d'Iwahori-Hecke en remplaçant dans cette présentation les relations $s^2 = 1$ par $(s - 1)(s + q) = 0$. Cela justifie l'extension de cette définition à tout groupe de Coxeter (fini), et fait apparaître l'algèbre de Hecke $H(q)$ comme un quotient de l'algèbre de groupe du groupe d'Artin associé. Dans cette définition, q devient un paramètre quelconque.

Il est alors naturel de généraliser encore cette définition à un groupe de (« vraies ») réflexions complexes quelconque. Dans ce cadre, l'algèbre d'Iwahori-Hecke associée est définie comme le quotient de l'algèbre de groupe $\mathbb{C}B$ du groupe de tresses associé par les relations $(\sigma - 1)(\sigma + q) = 0$, pour σ une réflexion tressée. Une normalisation légèrement différente, que nous préférons ici, est $(\sigma - q)(\sigma + q^{-1}) = 0$.

Une propriété fondamentale des algèbres de Hecke dans le cadre Coxeter est le théorème, dû à J. Tits, selon lequel $H(q)$ est abstraitement isomorphe, pour des valeurs complexes génériques de q , à l'algèbre de groupe $\mathbb{C}W$ du groupe fini W – et en particulier est semi-simple. La généralisation de ce résultat à presque tous les groupes de réflexions complexes est l'un des objets de [BMR]. Un outil essentiel est la remarque de Cherednik dans [Ck] (voir aussi [Du, DO]) selon laquelle, dans le cas Coxeter, la 1-forme $\omega = h \sum_{s \in \mathcal{R}} s \omega_{\text{Ker}(s-1)}$ à valeurs dans $\mathbb{C}W \subset \text{End}(\mathbb{C}W)$, où $\mathcal{R}$ désigne l'ensemble des réflexions de W , est intégrable, W -équivariante, et a pour représentation de monodromie le quotient $\mathbb{C}B \rightarrow H(q)$ pour $q = \exp(i\pi h)$.

Si cette propriété, qui reste valable dans le cadre des groupes de réflexions complexes, découle presque immédiatement de l'étude par Kohno de l'algèbre de Lie d'holonomie, elle n'en est pas moins difficile à interpréter. En effet, elle signifie que l'on a un morphisme d'algèbres de Lie $\mathcal{T} \rightarrow \mathbb{C}W$, W -équivariant, où l'algèbre de groupe $\mathbb{C}W$ est considérée comme une algèbre de Lie avec crochet $[a, b] = ab - ba$. L'objet naturel à considérer dans cette construction est donc l'image de $\mathcal{T}$ dans $\mathbb{C}W$, c'est-à-dire l'algèbre de Lie $\mathcal{H}$ engendrée, dans $\mathbb{C}W$ considérée comme algèbre de Lie, par l'ensemble $\mathcal{R}$ des réflexions de W .

Dans ce chapitre, et à l'exception du §5, on appelle groupe de réflexions un groupe engendré par de vraies réflexions, et on considère seulement de tels groupes W . Pour $W = \mathfrak{S}_n$, l'algèbre de Lie $\mathcal{T}$ est souvent appelée « algèbre des tresses infinitésimales », ce qui fournit une première motivation à la dénomination choisie pour $\mathcal{H}$.

DÉFINITION. *L'algèbre de Hecke infinitésimale $\mathcal{H}$ de W est la sous-algèbre de Lie de $\mathbb{C}W$ engendrée par $\mathcal{R}$.*

Une première question est celle de la structure d'une telle algèbre de Lie, et du lien entre cette structure et les représentations du groupe W . Une deuxième question est celle de l'interprétation. Ces deux questions ont été traitées, et font l'objet de l'essentiel de ce chapitre.

Si W admet plusieurs classes de réflexions, ou bien si W est un groupe de pseudo-réflexions complexes, il apparaît une variété de paramètres possibles dans la définition de l'algèbre de Hecke. Dans ce cas, on peut définir une algèbre de Hecke infinitésimale « à paramètres » naturellement associée à la construction de [BMR]. Ce cas est traité au §5.

Pour $W = \mathfrak{S}_n$, l'algèbre de Lie $\mathcal{H}$ a été introduite (et décomposée pour $n \leq 5$) dans ma thèse de doctorat. Le cas $W = \mathfrak{S}_n$ est traité dans [7]. Le cas de W un groupe de Coxeter a été introduit dans [6], et son étude a été poursuivie dans [1]. Enfin, le cas général a été résolu dans [9], et l'extension aux groupes de pseudo-réflexions est faite dans [10].

2. Sous-algèbres de Lie de l'algèbre de groupe

Soit G un groupe fini, et $\mathbb{k} \subset \overline{\mathbb{Q}}$ un corps sur lequel toutes les représentations linéaires ordinaires de G sont réalisables. On note $\text{Irr}(G)$ l'ensemble des (classes de) représentations irréductibles et, pour $\rho \in \text{Irr}(G)$, on note V_ρ le $\mathbb{k}$ -espace vectoriel sous-jacent. Considérée comme algèbre de Lie pour le crochet $[a, b] = ab - ba$, l'algèbre de groupe $\mathbb{k}G$ est réductive,

$$\mathbb{k}G = \bigoplus_{\rho \in \text{Irr}(G)} \mathfrak{gl}(V_\rho), \quad (\mathbb{k}G)' = [\mathbb{k}G, \mathbb{k}G] = \bigoplus_{\rho \in \text{Irr}(G)} \mathfrak{sl}(V_\rho),$$

et le centre de $\mathbb{k}G$ est son centre comme algèbre associative, et donc engendré par les $T_c = \sum_{g \in c} g$ pour c parcourant les classes de conjugaisons de G .

2.1. Algèbres de Lie associées à un caractère multiplicatif. Soit $\alpha : G \rightarrow \mathbb{k}^\times$ un caractère multiplicatif, éventuellement trivial. Le caractère α définit une relation d'équivalence sur $\text{Irr}(G)$, engendrée par $\rho^* \otimes \alpha \sim \rho$. On remarque que $\rho^* \otimes \alpha \simeq \rho$ signifie que soit $S^2\rho$ soit $\Lambda^2\rho$ contient α .

Soit $\mathcal{L}_\alpha(G)$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{k}G$ engendré par les $g - \alpha(g)g^{-1}$ pour $g \in G$. Un calcul élémentaire montre que ce sous-espace vectoriel est stable par crochet. Sa structure comme algèbre de Lie est obtenue dans [8].

THÉORÈME. *L'algèbre de Lie $\mathcal{L}_\alpha(G)$ est réductive,*

$$\mathcal{L}_\alpha(G)' = \left(\bigoplus_{\{\rho^* \otimes \alpha \not\simeq \rho\}/\sim} \mathfrak{sl}(V_\rho) \right) \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \hookrightarrow S^2\rho} \mathfrak{so}(V_\rho) \right) \left(\bigoplus_{\alpha \hookrightarrow \Lambda^2\rho} \mathfrak{sp}(V_\rho) \right)$$

et son centre est engendré par les $T_c - \alpha(c)T_{c^{-1}}$.

Le cas $\alpha = 1$ a été traité de manière indépendante par A. Cohen et D.E. Taylor dans [CT] par des méthodes élémentaires. Dans le cas général, cette algèbre de Lie et ses

variantes permettent d'interpréter en termes de théorie de Lie un certain nombre d'aspects de la théorie des représentations ordinaires des groupes finis (théorie de Clifford, indicateur de Frobenius-Schur et ses variantes).

2.2. Algèbres de Lie engendrées. Soit $S \subset G$ un ensemble de générateurs de G . Un premier résultat sur l'algèbre de Lie engendrée par S est le suivant (voir [6, 9]).

PROPOSITION. *La sous-algèbre de Lie de $\mathbb{k}G$ engendrée par S est réductive. Son centre est inclus dans $Z(\mathbb{k}G)$ et une base est donnée par les T_c pour $c \in S$.*

Soit $g \in G$ d'ordre n . A un tel élément sont naturellement associés deux endomorphismes de $\mathbb{k}G$, l'action classique $\text{Ad}(g) : x \mapsto gxg^{-1}$ et les opérateurs de Lie $\text{ad}(g) : x \mapsto gx - xg$. On note que les endomorphismes $\text{ad}(g^k)$ pour k variable commutent entre eux. Un résultat général obtenu dans ce cadre est le suivant ([10]).

PROPOSITION. *$\text{Ad}(g)$ est un polynôme rationnel en les $\text{ad}(g^k)$ qui dépend seulement de n . Si n est impair ou si $n = 2$, alors $\text{Ad}(g)$ est un polynôme à coefficients rationnels en $\text{ad}(g)$.*

3. Structure des algèbres infinitésimales

D'après les résultats précédents, on sait que $\mathcal{H}$ est réductive, et que son centre est engendré par les T_c pour $c \in \mathcal{R}$. Il suffit donc de considérer $\mathcal{H}' = [\mathcal{H}, \mathcal{H}]$, et de décomposer cette algèbre de Lie semisimple en produit idéaux simples. On peut supposer que $\mathbb{k} = \mathbb{C}$, cette algèbre de Lie étant en fait déployée sur $\mathbb{k}$. Ce travail de décomposition a abouti dans [9], dont tous les résultats de ce paragraphe et du suivant sont issus. La démonstration s'appuie sur la classification des groupes de réflexions complexes de façon essentielle.

On a $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}_\varepsilon(W)$, où $\varepsilon : W \rightarrow \{\pm 1\}$ est le caractère donné par le déterminant, puisque $2s = s - \varepsilon(s)s^{-1}$ pour tout $s \in \mathcal{R}$. Si $\rho \in \text{Irr}(W)$, l'idéal $\mathcal{V}(\rho)$ de $\mathcal{H}'$ défini par l'orthogonal, pour la forme de Killing de $\mathcal{H}'$, de la représentation $\rho_{\mathcal{H}'}$ de $\mathcal{H}'$ déduite de ρ , se décrit de la façon suivante. On isole d'abord dans $\text{Irr}(W)$ plusieurs représentations remarquables :

$$\begin{aligned} \text{Ref} &= \{\rho \in \text{Irr}(W) \mid \dim \rho \geq 2 \text{ et } \forall s \in \mathcal{R} \rho(s) \neq 1 \Rightarrow \rho(s) \text{ est une réflexion} \} \\ \text{QRef} &= \{\eta \otimes \rho \mid \rho \in \text{Ref}, \eta \in \text{Hom}(W, \mathbb{k}^\times)\} \\ \Lambda\text{Ref} &= \{\eta \otimes \Lambda^k \rho \mid \rho \in \text{Ref}, \eta \in \text{Hom}(W, \mathbb{k}^\times), k \geq 0\} \end{aligned}$$

et on associe à tout $\rho \in \text{Irr}(W)$ un sous-groupe de $\text{Hom}(W, \mathbb{k}^\times)$:

$$X(\rho) = \{\eta \in \text{Hom}(W, \mathbb{k}^\times) \mid \rho(s) \notin \mathbb{k}^\times \Rightarrow \eta(s) = 1\}.$$

Si $\rho^* \otimes \rho^*$ contient $\eta \otimes \varepsilon$ pour un certain $\eta \in X(\rho)$, c'est-à-dire si $\rho^* \otimes \varepsilon \simeq \rho \otimes \eta$, alors ce η est unique, et définit une forme bilinéaire non dégénérée, symétrique ou antisymétrique, sur V_ρ . On note $\mathfrak{osp}(V_\rho)$ la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{sl}(V_\rho)$ qui préserve cette forme bilinéaire. Le cas $\eta = 1$ correspond aux sous-algèbres de Lie $\mathfrak{so}(V_\rho)$, $\mathfrak{sp}(V_\rho)$ définies plus haut pour $\mathcal{L}_\varepsilon(W)$.

La proposition suivante suffira à décrire les idéaux simples de $\mathcal{H}'$.

PROPOSITION. *Soit $\rho \in \text{Irr}(W)$. Si $\rho \in \text{QRef}$, alors $\mathcal{V}(\rho) \simeq \mathfrak{osp}(V_\rho)$ s'il existe $\eta \in X(\rho)$ tel que $\rho^* \otimes \varepsilon \simeq \rho \otimes \eta$, et $\mathcal{V}(\rho) \simeq \mathfrak{sl}(V_\rho)$ sinon.*

Les propriétés remarquables de $\mathcal{H}'$ sont les suivantes :

- (1) pour toute représentation irréductible ρ de dimension > 1 de W , $\mathcal{V}(\rho)$ est un idéal *simple* de $\mathcal{H}'$;
- (2) tout idéal simple de $\mathcal{H}'$ s'obtient ainsi.

Une fois ces propriétés admises, il suffit de décrire à quelles conditions deux représentations irréductibles ρ_1 et ρ_2 de dimension au moins 2 fournissent le même idéal (simple) de $\mathcal{H}'$, pour pouvoir en déduire la structure abstraite de $\mathcal{H}'$. C'est le cas :

- si $\rho_2 = \eta \otimes \rho_1$, pour un certain $\eta \in X(\rho_1)$
- si $\rho_2 = \rho_1^* \otimes \varepsilon$
- pour $\rho \in \text{Ref}$, $\eta \in \text{Hom}(W, \mathbb{k}^\times)$ et $k \geq 1$, si $\rho_1 = \rho \otimes \eta$ et $\rho_2 = \eta \otimes \Lambda^k \rho_1$ (et inversement)
- si ρ_2, ρ_1 sont de dimension 8 et $\varepsilon \hookrightarrow S^2 \rho_1$, $\varepsilon \hookrightarrow S^2 \rho_2$ (ce dernier cas se produit seulement pour W le groupe de Coxeter de type H_4)

ainsi que toute combinaison transitive des règles précédentes. Cela définit donc une relation d'équivalence $\approx$ sur $\text{Irr}(W)$, telle que $\text{Irr}(W)/\approx$ s'identifie à l'ensemble des idéaux simples de $\mathcal{H}'$. Cette relation respecte l'ensemble ΛRef (au sens où $\rho_1 \approx \rho_2$ et $\rho_1 \in \Lambda\text{Ref}$ impliquent $\rho_2 \in \Lambda\text{Ref}$), et par définition, pour tout $\rho \in \Lambda\text{Ref}$, il existe $\rho_0 \in \text{QRef}$ telle que $\rho \approx \rho_0$.

On subdivise ensuite $\text{Irr}(W) \setminus \Lambda\text{Ref}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \{\rho \in \text{Irr}(W) \setminus \Lambda\text{Ref} \mid \rho^* \otimes \varepsilon \not\approx \rho\} \\ \mathcal{F}_{\text{so}} &= \{\rho \in \text{Irr}(W) \setminus \Lambda\text{Ref} \mid \varepsilon \hookrightarrow S^2 \rho\} \\ \mathcal{F}_{\text{sp}} &= \{\rho \in \text{Irr}(W) \setminus \Lambda\text{Ref} \mid \varepsilon \hookrightarrow \Lambda^2 \rho\} \end{aligned}$$

On déduit alors de la proposition et des propriétés précédentes la structure abstraite de $\mathcal{H}'$.

THÉORÈME. *L'algèbre de Lie $\mathcal{H}$ est réductive. Une base de son centre est donnée par les T_c pour $c \in \mathcal{R}$, et*

$$\mathcal{H}' \simeq \left(\prod_{\rho \in \text{QRef}/\approx} \mathfrak{sl}(V_\rho) \right) \times \left(\prod_{\rho \in \mathcal{E}/\approx} \mathfrak{sl}(V_\rho) \right) \times \left(\prod_{\rho \in \mathcal{F}_{\text{so}}/\approx} \mathfrak{so}(V_\rho) \right) \times \left(\prod_{\rho \in \mathcal{F}_{\text{sp}}/\approx} \mathfrak{sp}(V_\rho) \right)$$

La partie de la démonstration de ce théorème de structure qui repose sur la classification des groupes de réflexions complexes, est largement concentrée dans la preuve de la proposition. Si $\rho \in \text{QRef}$, la preuve que $\mathcal{V}(\rho) \simeq \mathfrak{sl}(V_\rho)$ n'utilise pas la classification, mais construit une sous-algèbre de Cartan explicite, à partir d'une combinaison linéaire de $\sum_{s \in \mathcal{R}_0} T_{s_0}$ où $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R} \cap W_0$ et W_0 parcourt une suite de paraboliqes irréductibles.

En revanche, pour $\rho \notin \Lambda\text{Ref}$, cette proposition se démontre par récurrence sur l'ordre de W , en introduisant à chaque fois un sous-groupe de réflexion W_0 bien choisi, d'algèbre de Hecke infinitésimale $\mathcal{H}_0$ supposée connue. L'argument consiste alors à utiliser l'irréductibilité de $\rho_{\mathcal{H}'}$, la classification des algèbres de Lie simples complexes et de leurs représentations, et un contrôle numérique précis sur le rang semisimple de $\rho(\mathcal{H}'_0)$. Pour ce faire, on a en particulier besoin de contrôler les multiplicités dans la table d'induction de W_0 à W . Pour

la série générale, le cas critique est donné par l'inclusion $G(e, e, r - 1) < G(e, e, r)$, et nécessite l'étude combinatoire exposée au §5 du chapitre 4.

On peut alors identifier $\mathcal{H}$ à l'algèbre de Lie de l'enveloppe algébrique de P (ou B) dans le groupe des inversibles $H(q)^\times$ de $H(q)$. Ceci donne une autre justification du nom d'algèbre de Hecke infinitésimale. Plus précisément, on a le résultat suivant.

THÉORÈME. *Soit ρ une représentation de W , et $R : B \rightarrow \mathrm{GL}(V_\rho \otimes K)$ la représentation de l'algèbre de Hecke associée. Alors l'adhérence de Zariski de $R(P)$ est un groupe algébrique connexe, d'algèbre de Lie $\rho(\mathcal{H})$.*

Ce groupe algébrique réductif est décrit en détail dans [9]. Le phénomène particulier remarqué sur H_4 se traduit dans ce groupe algébrique par un phénomène de triality sur un facteur Spin_8 .

4. Formes compactes

On montre dans [9] que l'algèbre de Lie $\mathcal{H}$ admet une forme compacte naturelle.

PROPOSITION. *La sous-algèbre de Lie réelle de $\mathbb{C}W$ engendrée par les $\sqrt{-1}s$, pour $s \in \mathcal{R}$, est une forme compacte de $\mathcal{H}$.*

De même que l'algèbre de Lie $\mathcal{H}$ peut s'interpréter comme l'algèbre de Lie du groupe algébrique qui est l'adhérence de Zariski de $\mathrm{Im}(P \rightarrow H(q)^\times)$, une forme compacte de $\mathcal{H}$ s'interprète comme l'algèbre de Lie de l'adhérence topologique de $\mathrm{Im}(P \rightarrow H(q)^\times)$ quand cette dernière image est un groupe compact (pour des valeurs complexes de q , génériques dans un domaine convenable).

On se restreint au cadre d'un *groupe de Coxeter* fini W . L'unitarisabilité des représentations de l'algèbre de Hecke (pour l'action de B) était connue en type A, c'est-à-dire pour le groupe symétrique. Une première preuve dans ce cas a été donnée par H. Wenzl dans [Wz], par construction relativement ad-hoc de modèles matriciels explicites respectant une certaine forme sesquilinéaire, définie positive pour $|q| = 1$ et q proche de 1.

Il est nécessaire en général d'imposer une telle condition sur q pour espérer unitariser ces représentations. En effet, la condition $|q| = 1$ est imposée par le spectre des réflexions tressées, et on sait de plus que ces représentations ne sont pas unitarisables en général, déjà pour $W = \mathfrak{S}_n$, si q s'éloigne trop de 1.

J'ai montré dans [4] que les modèles matriciels de Wenzl s'obtiennent naturellement à partir du modèle orthogonal de Young des représentations du groupe symétrique à partir d'un associateur de Drinfeld pair et rationnel quelconque.

En général, la construction monodromique montre que l'image de telles représentations va être incluse dans un certain groupe unitaire formel $U_N^\varepsilon(K)$. D'un autre côté, la théorie des W -graphes de Lusztig a permis de montrer que les représentations des algèbres de Hecke associées aux groupes de Coxeter finis admettent des modèles matriciels sur $\mathbb{R}[q, q^{-1}]$. En conjuguant ces deux informations ainsi que des arguments de descente, on obtient dans [9] une preuve d'unitarisabilité dans tous les types. Par d'autres méthodes, le cas particulier de la représentation de réflexion a été obtenu indépendamment par Couwenberg, Heckman et Looijenga dans [CHL] (corollaire 3.18).

THÉORÈME. *Soit $q \in \mathbb{C}^\times$ et W un groupe de Coxeter fini. Si $|q| = 1$ et q est suffisamment proche de 1, toute représentation de $H(q)$ est unitarisable pour l'action de B .*

En particulier, pour q vérifiant ces conditions, l'image de B a pour adhérence topologique un groupe de Lie compact, dont le type est essentiellement déterminé par son adhérence pour la topologie de Zariski. Pour q transcendant, on en déduit dans [9] une interprétation des formes compactes de $\mathcal{H}$.

THÉORÈME. *Soit $q \in \mathbb{C}^\times$, W un groupe de Coxeter fini, ρ une représentation de W et R la représentation de $H(q)$ associée. Pour q transcendant de module 1 et proche de 1, l'adhérence topologique de $R(P)$ est un groupe compact connexe, d'algèbre de Lie une forme compacte de $\rho(\mathcal{H})$.*

Pour $W = \mathfrak{S}_n$ on retrouve ainsi le résultat de [FLW] (pour des valeurs transcendentes de q) qui détermine l'adhérence topologique de B dans la représentation de Jones-Wenzl, et cela montre que l'algèbre de Lie de cette adhérence topologique est isomorphe à la sous-algèbre de Lie réelle de $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ engendrée par les transpositions normalisées $\sqrt{-1}(i\ j)$, pour $1 \leq i < j \leq n$.

5. Algèbres infinitésimales à plusieurs paramètres

Si W admet plusieurs classes de réflexions, les objets naturels à considérer dans la même optique sont les algèbres de Lie engendrées par les λ^c s pour c parcourant les classes de réflexions, $\lambda^c \in \mathbb{C}$, et s parcourant c . Ces algèbres de Lie coïncident avec l'algèbre de Lie $\mathcal{H}$ associée au sous-groupe de réflexion de W_0 engendré par les $s \in c \subset \mathcal{R}$ pour $\lambda^c \neq 0$, donc leur structure est déjà connue par les résultats précédents.

En revanche, si W est un groupe de pseudo-réflexions, plusieurs généralisations naturelles de $\mathcal{H}$ entrent en jeu. La construction de [BMR] montre en effet que l'on obtient des représentations des « algèbres de Hecke » associées à W à partir de morphismes $\varphi_{\underline{\lambda}} : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{C}W$, qui dépendent de paramètres $\underline{\lambda}$. Les algèbres de Lie à considérer pour déterminer l'enveloppe algébrique de P sont donc les $\varphi_{\underline{\lambda}}(\mathcal{T})$.

Dans cette section, on utilisera réflexion pour pseudo-réflexion, et on parlera de 2-réflexions pour les « vraies » réflexions. Les résultats exposés sont issus de [10].

On note $\mathcal{R}$ l'ensemble des réflexions de W , $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$ l'ensemble des réflexions distinguées, c'est-à-dire de valeur propre $\exp(2i\pi/e)$, où e est l'ordre du fixateur de $\text{Ker}(s - 1)$ dans W . On note $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$ l'ensemble des 2-réflexions, $\mathcal{S}_+ = \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_0$. On note $\mathcal{C}_+$ l'ensemble des classes de conjugaisons dans $\mathcal{S}_+$ et, pour $c \in \mathcal{C}_+$, on note e_c l'ordre d'un élément de c .

On introduit alors un espace (affine) de paramètres

$$\mathbb{A}(W) = \prod_{c \in \mathcal{C}_+} \mathbb{C}^{e_c - 1}$$

et on notera $\underline{\lambda} = (\lambda^c)_{c \in \mathcal{C}_+}$ un élément typique de $\mathbb{A}(W)$, avec $\underline{\lambda}^c = (\lambda_1^c, \dots, \lambda_{e_c-1}^c)$.

Pour un groupe de 2-réflexions, les algèbres de Lie suivantes coïncident

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \langle s \mid s \in \mathcal{R} \rangle \\ \mathcal{H}_s &= \langle s \mid s \in \mathcal{S} \rangle \\ \mathcal{H}(\underline{\lambda}) &= \langle \mathcal{S}_0 \cup \{ \lambda_1^c s + \dots + \lambda_{e_c-1}^c s^{e_c-1} \mid s \in \mathcal{S}_+ \} \rangle \\ \mathcal{H}_{st} &= \langle \mathcal{S}_0 \cup \{ s + \dots + s^{e_c-1} \mid s \in \mathcal{S}_+ \} \rangle\end{aligned}$$

Les algèbres de Lie $\mathcal{H}_s$, $\mathcal{H}_{st}$ sont des cas particuliers de $\mathcal{H}(\underline{\lambda})$, qui est l'algèbre de Lie qui nous intéresse pour l'application en vue : on a en effet $\varphi_{\underline{\lambda}}(\mathcal{T}) = \mathcal{H}(\underline{\lambda})$.

Toutes ces algèbres de Lie sont incluses dans l'algèbre (de Lie) $\mathcal{H}$, qui est réductive et que nous appelons l'algèbre *ambiante*. Pour l'étudier, nous reprenons les notations QRef, Λ Ref, Ref du §3, qui gardent un sens ici.

Si $\rho \in \text{Irr}(W)$, et $\mathfrak{g}$ est une des algèbres de Lie sus-citées, on note $\rho_{\mathfrak{g}}$ la représentation de $\mathfrak{g}$ qui s'en déduit. La représentation $\rho_{\mathcal{H}'}$ est toujours irréductible, puisque $\mathcal{R}$ engendre W . Si $\rho_{\mathcal{H}'}$ est autoduale, il existe une forme bilinéaire invariante préservée par $\mathcal{H}'$. On note $\mathfrak{osp}(V_{\rho})$ la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{sl}(V_{\rho})$ qui préserve cette forme, orthogonale ou symplectique. On note alors, pour $\rho \notin \Lambda\text{Ref}$,

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \{ \rho \in \text{Irr}(W) \setminus \Lambda\text{Ref} \mid \rho_{\mathcal{H}'} \not\simeq (\rho_{\mathcal{H}'})^* \} \\ \mathcal{F} &= \{ \rho \in \text{Irr}(W) \setminus \Lambda\text{Ref} \mid \rho_{\mathcal{H}'} \simeq (\rho_{\mathcal{H}'})^* \}\end{aligned}$$

La relation d'équivalence $\approx$ définie au §3 se généralise ici, modulo quelques adaptations. Notamment, la relation $\rho_2 \approx \rho_1^* \otimes \varepsilon$ admet une formulation légèrement plus complexe sur $\text{Irr}(W)$; la relation en dimension 8 ne concerne que les groupes de 2-réflexions. Renvoyant à [10] pour une description complète de ces adaptations, on obtient ainsi un énoncé similaire.

THÉORÈME. *L'algèbre de Lie ambiante $\mathcal{H}$ est réductive. Une base de son centre est formée des T_c pour $c \in \mathcal{R}$, et*

$$\mathcal{H}' \simeq \left(\prod_{\rho \in \text{QRef}/\approx} \mathfrak{sl}(V_{\rho}) \right) \times \left(\prod_{\rho \in \mathcal{E}/\approx} \mathfrak{sl}(V_{\rho}) \right) \times \left(\prod_{\rho \in \mathcal{F}/\approx} \mathfrak{osp}(V_{\rho}) \right)$$

On a $\mathcal{H}(\underline{\lambda}) \subset \mathcal{H}$. En général il n'y a pas de raison, à ma connaissance, de penser que $\mathcal{H}(\underline{\lambda})$ est toujours réductive – pour autant, je n'ai pas trouvé de contre-exemple parmi les groupes étudiés. Par des arguments généraux, on obtient néanmoins les propriétés suivantes.

PROPOSITION. *Les algèbres de Lie $\mathcal{H}_s$ et $\mathcal{H}_{st}$ sont réductives.*

D'autre part, il n'est pas vrai en général que les algèbres dérivées $\mathcal{H}'_s$ et $\mathcal{H}'_{st}$ coïncident avec $\mathcal{H}'$. On montre néanmoins que, pour des valeurs génériques de $\underline{\lambda}$, les algèbres de Lie $\mathcal{H}(\underline{\lambda})$ sont réductives et leur partie semisimple $\mathcal{H}(\underline{\lambda})'$ coïncide avec $\mathcal{H}'$.

THÉORÈME. *Il existe un complémentaire d'hyperplans $\mathbb{A}(W)^{\times} \subset \mathbb{A}(W)$ tel que, pour tout $\underline{\lambda} \in \mathbb{A}(W)^{\times}$, l'algèbre de Lie $\mathcal{H}(\underline{\lambda})$ est réductive, a un centre de dimension $|\mathcal{S}/W|$, et $\mathcal{H}(\underline{\lambda})' = \mathcal{H}'$.*

L'algèbre de Lie $\mathcal{H}_{st}$ correspond à la spécialisation « spetsiale », utile dans le programme 'Spetses' de [BMM]. Nous avons décomposé $\mathcal{H}'_{st}$ pour un certain nombre de cas dans [10].

Un aspect intéressant du cas à plusieurs paramètres est que l'action naturelle de $\text{Hom}(W, \mathbb{k}^\times)$ par automorphismes sur $\mathbb{k}W$, qui envoie le caractère η sur $g \mapsto \eta(g)g$ pour $g \in W$, laisse $\mathcal{H}$ invariant, et permute entre elles les algèbres $\mathcal{H}(\underline{\lambda})$ pour $\underline{\lambda} \in \mathbb{A}(W)^\times$. Elle induit donc des automorphismes de $\mathcal{H}(\underline{\lambda})' = \mathcal{H}'$ qui traduisent à un niveau infinitésimal les changements cycliques de paramètres remarqués dans l'étude des représentations des algèbres de Hecke cyclotomiques.

CHAPITRE 4

Représentations des groupes de réflexions

Dans tout ce chapitre, on utilisera « réflexion » pour « pseudo-réflexion », et on parlera d'un groupe de réflexions complexes pour un groupe engendrée par des (pseudo-)réflexions.

1. Corps de définition

Le corps de définition de $W < \mathrm{GL}(V)$ est défini comme le sous-corps de $\mathbb{C}$ engendré par les traces des éléments de W . Dans ce chapitre, nous notons K ce corps de nombres. Il est clair que K est inclus dans le corps des nombres cyclotomiques $\mathbb{Q}(\mu_\infty)$, et c'est donc une extension galoisienne *abélienne* de $\mathbb{Q}$.

Une propriété générale est que la représentation de définition $W \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ est réalisable sur K . On a $K = \mathbb{Q}$ si et seulement si W est le groupe de Weyl d'un groupe algébrique, et $K \subset \mathbb{R}$ si et seulement si W est un groupe de Coxeter fini.

En 1976, en utilisant la classification des groupes de réflexions et leur table de caractère, M. Benard a déterminé dans [Bd] des corps de réalisabilité minimaux pour chacune des représentations irréductibles de ces groupes. Il découle de ce travail le résultat suivant, énoncé pour la première fois dans [Bes].

THÉORÈME. *Toutes les représentations irréductibles de W sont réalisables sur K .*

La preuve directe de ce résultat donnée par D. Bessis dans [Bes] s'appuie sur la connaissance de modèle matriciels explicites pour les groupes de type $G(de, e, r)$, ainsi que sur un algorithme informatique pour tester automatiquement les index de Schur sur les groupes exceptionnels. L'un des résultats de [11] est un algorithme qui vérifie une propriété tensorielle suffisante pour obtenir le résultat dans le cadre des groupes exceptionnels, et permet de se passer de la connaissance explicite des modèles matriciels pour la série infinie.

Néanmoins, ce résultat, qui admet une démonstration abstraite pour les groupes de Weyl, reste mystérieux dans le cadre des groupes de réflexions complexes.

2. Actions galoisiennes

L'origine de [11], travail en commun avec Jean Michel, a été la remarque que le groupe de Coxeter H_4 , pour lequel $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$, admettait un automorphisme qui induisait sur les caractères la même action que l'automorphisme non trivial de $\mathrm{Gal}(K|\mathbb{Q})$, et qui préservait l'ensemble des réflexions. Cette remarque est apparue lors d'essais de compréhension d'un phénomène particulier à H_4 dans le cadre du chapitre précédent. Comme d'autre part J. Michel avait auparavant étudié les automorphismes de W provenant du normalisateur

de W dans $\mathrm{GL}(V)$, ce travail nous a ensuite mené à une détermination du groupe des automorphismes de W .

Les résultats exposés dans ce paragraphe et le suivant ont été obtenus à partir de la classification de Shephard-Todd, et sont démontrés dans [11].

En premier lieu, notons que les conjugués par $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ du caractère de la représentation de définition $W \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ correspondent à des représentations « de réflexion », c'est-à-dire qui envoient les réflexions de W sur des réflexions de l'espace vectoriel sous-jacent, qui sont de plus irréductibles et fidèles. Un premier résultat obtenu est le suivant.

THÉORÈME. *$\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ agit transitivement sur les caractères de réflexions fidèles de W .*

Une question naturelle est d'autre part de savoir si, pour une représentation ρ de W réalisée sur un K -espace vectoriel, il existe une $\mathbb{Q}$ -forme de ce K -espace vectoriel telle que $\rho(W)$ soit globalement invariant pour l'action de $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$.

La réponse est presque positive, à une légère modification près de K . Notant $K' = K$ pour la plupart des groupes, et K' une certaine extension quadratique de K pour les autres, on obtient le résultat suivant.

THÉORÈME. *Pour toute représentation ρ de W réalisée sur un K' -espace vectoriel, il existe une $\mathbb{Q}$ -forme de ce K' -espace vectoriel telle que $\rho(W)$ soit globalement invariant pour l'action de $\mathrm{Gal}(K'/\mathbb{Q})$.*

A partir d'une telle réalisation de la représentation de définition de W (modulo une légère modification pour G_{22}) il est possible de construire pour presque tous les groupes un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Gal}(K'/\mathbb{Q}) & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(W) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) & \longrightarrow & \mathrm{Out}(W) \end{array}$$

tel que le morphisme $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \rightarrow \mathrm{Out}(W)$ soit injectif, et soit « presque » compatible avec les actions naturelles de ces deux groupes sur les caractères de W . Les exceptions sont formées de quelques représentations irréductibles *rationnelles* des groupes G_{27} , G_{29} et G_{34} sur lesquelles l'action de $\mathrm{Out}(W)$ est non triviale.

Il découle de ces résultats, par descente galoisienne, le résultat suivant.

THÉORÈME. *Les variétés algébriques X , X/W et le morphisme $X \rightarrow X/W$ sont définis sur $\mathbb{Q}$.*

3. Automorphismes des groupes de réflexions complexes

Dans ce qui suit, on suppose que W est irréductible et de rang (la dimension de V) au moins 3, pour simplifier l'exposition des résultats. Une conséquence de l'irréductibilité est que $Z(W) \subset K^\times$ est cyclique.

Les automorphismes « galoisiens » obtenus précédemment ont la propriété remarquable de préserver l'ensemble des réflexions. On note A le sous-groupe de tels automorphismes,

et $\bar{A}$ son image dans $\text{Out}(W)$. Le groupe A admet pour sous-groupe le normalisateur N de W dans $\text{GL}(V)$. On note encore $\bar{N}$ son image dans $\text{Out}(W)$.

Un dernier groupe d'automorphismes à considérer est le groupe C des transvections inversibles, ou automorphismes centraux, c'est-à-dire ceux obtenus par $g \mapsto \alpha(g)g$ pour un certain caractère multiplicatif $\alpha : W \rightarrow Z(W) \subset K^\times$. On note encore $\bar{C}$ son image dans $\text{Out}(W)$.

Les résultats obtenus sont les suivants. Il est bien connu que $\text{Out}(\mathfrak{S}_n) = \{1\}$ sauf pour $n = 6$, valeur pour laquelle apparaît un automorphisme extérieur sans rapport apparent avec la structure de groupe de réflexion. Il est remarquable que ce phénomène soit l'unique exception parmi tous les groupes de réflexions complexes.

THÉORÈME. *Si $W \neq \mathfrak{S}_6$, alors $\text{Aut}(W) = C \rtimes A$.*

La structure de $\bar{A}$, quant à elle, s'exprime simplement à partir d'un morphisme naturel $\bar{A} \rightarrow \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$. Ce morphisme est défini comme suit. Soit $a \in A$, et χ_V le caractère de la représentation de définition de W . Alors $\chi_V \circ a$ est le caractère d'une représentation de réflexion fidèle de W . Par transitivité de l'action de $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ on en déduit un $\sigma \in \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ tel que $\chi_V \circ a = \sigma \circ \chi_V$. Cette application est bien définie parce que K est engendré par les valeurs de χ_V , et définit un morphisme $A \rightarrow \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$, donc $\bar{A} \rightarrow \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$, dont le noyau s'identifie à $\bar{N}$. La structure de $\bar{A}$ est alors donnée par le résultat suivant.

THÉORÈME. *Le morphisme naturel $\bar{A} \rightarrow \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ est surjectif et admet une section, c'est-à-dire $\bar{A} \simeq \bar{N} \rtimes \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$.*

4. Arrangements de réflexions et systèmes de racines

Soit $\mathcal{A}$ l'arrangement associé à $W < \text{GL}(V)$. Pour tout $H \in \mathcal{A}$, on dit que $\alpha_H \in V^*$ définit H si $H = \text{Ker} \alpha_H$, et on note $\mathbb{C}\mathcal{A}$ l'espace vectoriel de base $\mathcal{A}$. Les résultats de ce paragraphe sont issus de [13].

Un résultat général sur les arrangements de réflexions, démontrable de façon élémentaire, est le suivant.

THÉORÈME. *Si W est irréductible, pour tout choix de formes linéaires α_H définissant $H \in \mathcal{A}$, l'application linéaire $\mathbb{C}\mathcal{A} \rightarrow S^2 V^*$ qui à H associe α_H^2 est surjective.*

On en déduit une inégalité quadratique optimale entre le nombre d'hyperplans d'un tel arrangement et son rang (par opposition les théories classiques donnent des inégalités linéaires).

COROLLAIRE. *Si W est un groupe de réflexions irréductible de rang n , on a $|\mathcal{A}| \geq n(n+1)/2$, l'égalité étant atteinte pour $W = \mathfrak{S}_n < \text{GL}_{n-1}(\mathbb{C})$.*

Si W est un groupe de Coxeter, on peut choisir les α_H de telle façon que l'application linéaire $\mathbb{C}\mathcal{A} \rightarrow S^2 V^*$ soit un morphisme de W -modules pour les actions naturelles ; dans le cas où W est un groupe de Weyl, il suffit de prendre pour α_H les coracines d'un système de racines associé.

En utilisant la classification de Shephard et Todd, on trouve que cette propriété, de projection $\mathbb{CA} \rightarrow S^2V^*$ comme W -modules, est presque caractéristique des groupes de Coxeter. Plus précisément, elle est vérifiée lorsque $\kappa(W) = 2$, où $\kappa(W)$ est un nombre qui peut être défini par

$$\kappa(W) = \min\{n \in \mathbb{Z}_{>0} \mid \forall w \in W \ \forall H \in \mathcal{A} \ w \cdot \alpha_H = \zeta \alpha_H \Rightarrow \zeta^n = 1\}$$

où α_H désigne une forme linéaire arbitraire définissant H . On a $\kappa(W) = 2$ si et seulement si W est un groupe de Coxeter ou bien un groupe exceptionnel de type G_{12} ou G_{24} .

Ce nombre admet une autre interprétation. Rappelons d'abord que, si W est un groupe de Coxeter associé à un système de racines Φ et $\Phi^+ = \{v_H, H \in \mathcal{A}\} \subset \Phi$ un choix de racines positives, on a une action de W sur Φ qui ne préserve pas Φ^+ . On peut alors définir une représentation de permutation de W sur $\mathbb{C}\Phi^+$, par $w \bullet v_H = v_{w(H)}$, ainsi qu'une représentation « hyperoctaédrale », pour laquelle $w \bullet v_H = v_{w(H)}$ si $w \cdot v_H \in \Phi^+$, et $w \bullet v_H = -v_{w(H)}$ sinon.

On introduit alors, en général, la représentation commutative de $\mathcal{T}$ qui à t_H associe le projecteur naturel de $\mathbb{CA}$ sur $\mathbb{C}H$. Cette représentation est compatible avec la représentation de permutation de W sur $\mathbb{CA}$, et définit une famille $R_h : B \rightarrow \text{GL}(\mathbb{CA})$ de représentations de B .

La représentation R_0 se factorise par W , et s'identifie à la représentation de permutation sur $\mathbb{CA}$. Pour un groupe de Coxeter, elle s'identifie encore à la représentation de permutation sur $\mathbb{C}\Phi^+$.

PROPOSITION. *Si W est un groupe de Coxeter, alors $h \mapsto R_h$ est 2-périodique, et R_1 se factorise par la représentation hyperoctaédrale de W sur $\mathbb{C}\Phi^+$.*

Dans le cadre général, le résultat est le suivant.

THÉORÈME. *Pour tout $h \in \mathbb{C}$, la représentation R_h est semisimple, et irréductible pour $h \notin \mathbb{Z}$. Elle se factorise par W si et seulement si $h \in \mathbb{Z}$, et la famille de représentations $h \mapsto R_h$ est $\kappa(W)$ -périodique.*

Ainsi, les représentations $R_1, R_2, \dots, R_{\kappa(W)-1}$ généralisent les représentations hyperoctaédrales de W sur $\mathbb{C}\Phi^+$ en des familles naturelles de représentations de W sur $\mathbb{CA}$, différentes de la représentation de permutation. Comme dans le cas des groupes de Coxeter, la représentation $R_1 : W \rightarrow \text{GL}(\mathbb{CA})$ est fidèle, alors que $\text{Ker } R_0 = Z(W)$.

Pour tout $h \in \mathbb{C}$, la représentation R_h se factorise par $B/(P, P)$, où (P, P) désigne le groupe des commutateurs de P . Pour $h \notin \mathbb{Z}$, on peut également montrer que

$$R_h : B/(P, P) \rightarrow \text{GL}(\mathbb{CA})$$

est fidèle.

L'invariant $\kappa(W)$ du groupe W n'a pas jusqu'à présent été relié à des invariants plus classiques de W , comme les degrés ou les codegrés. C'est en tous cas toujours un multiple de l'ordre de $Z(W)$.

5. Propriétés de branchement parabolique

Un phénomène remarquable, et très utile, dans l'étude des représentations du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$, est que les restrictions de ses représentations irréductibles à un parabolique maximal de type $\mathfrak{S}_{n-1}$ sont sans multiplicités.

Ce phénomène se généralise de façon étrange aux groupes de Coxeter (finis) : si W est un groupe de Coxeter irréductible, alors il admet un parabolique maximal pour lequel les restrictions sont sans multiplicités, *sauf pour* W de type E_8 où H_4 , auquel cas il peut apparaître des composants de multiplicité 2, mais jamais plus.

Dans le cadre des groupes de réflexion complexes, les représentations (ou les caractères) de la série infinie $G(de, e, r)$ sont d'ordinaire décrits de la façon suivante. Tout d'abord, $G(de, 1, r)$ étant un produit en couronne $\mathbb{Z}/de\mathbb{Z} \wr \mathfrak{S}_r$, ses caractères sont décrits par un de -uplet $(\lambda_0, \dots, \lambda_{de-1})$ de partitions de taille totale r , et la règle de restriction au parabolique maximal $G(de, 1, r-1)$ est décrite par une généralisation de la règle de Young : chaque composant irréductible apparaît avec multiplicité 1, et correspond aux de -uplets $(\mu_0, \dots, \mu_{de-1})$ avec $\mu_i = \lambda_i$ sauf pour un $i = i_0$, pour lequel $\mu_i \nearrow \lambda_i$, c'est-à-dire $\mu_i \subset \lambda_i$ avec $|\lambda_i| = |\mu_i| + 1$.

Ensuite, les représentations du sous-groupe $G(de, e, r)$ d'indice e de $G(de, 1, r)$ sont décrits par théorie de Clifford : deux de -uplets $(\lambda_0, \dots, \lambda_{de-1})$ déduits l'un de l'autre par permutation cyclique $i \mapsto i+d \pmod{de}$ ont des restrictions isomorphes, qui sont irréductibles si et seulement si le fixateur de ce de -uplet sous l'action de $\mathbb{Z}/e\mathbb{Z} < \mathbb{Z}/de\mathbb{Z}$ est trivial.

Le cas crucial, pour comprendre les restrictions aux paraboliques maximaux, consiste à comprendre en termes de représentations le carré commutatif

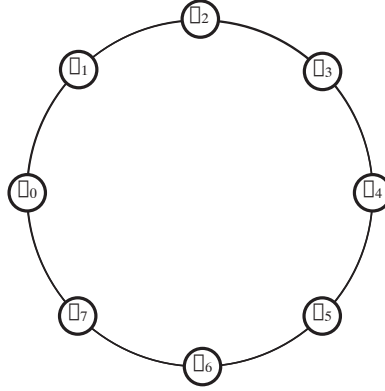
$$\begin{array}{ccc} G(e, 1, r-1) & \longrightarrow & G(e, 1, r) \\ \uparrow & & \uparrow \\ G(e, e, r-1) & \longrightarrow & G(e, e, r) \end{array}$$

Les problèmes de multiplicités se traduisent alors en termes combinatoires de colliers, et ont été explorées dans [12]. On peut représenter les restrictions de e -uplets $(\lambda_0, \dots, \lambda_{e-1})$ à $G(e, e, r)$ comme des colliers, dont les perles sont les partitions $\lambda_0, \dots, \lambda_{e-1}$ (figure 1). Les colliers sont dits avoir des symétries si le fixateur sous $\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$ d'un tel e -uplet est non trivial.

L'opération de restriction de l'inclusion $G(e, 1, r-1) < G(e, 1, r)$ se traduit alors par l'opération de changer exactement une perle dans le collier correspondant. Un premier problème est de savoir si, en effectuant cette opération sur un collier qui a des symétries, une (autre) symétrie peut apparaître.

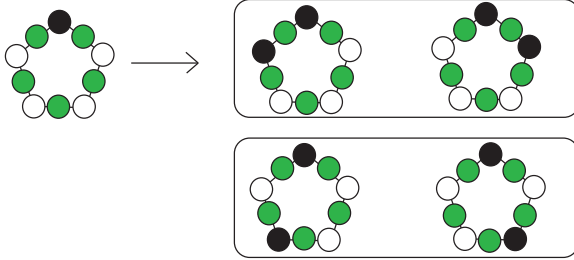
La réponse est non, ce qui découle de la propriété de « brisure de symétrie » suivante, appliquée au cas élémentaire d'un groupe cyclique.

PROPOSITION. *Soit X un ensemble et G un groupe qui ne contient pas de produit libre non trivial. On munit l'ensemble des applications $\{G \rightarrow X\}$ de l'action naturelle de G . Soit alors $\alpha, \beta \in \{G \rightarrow X\}$ tels qu'il existe un unique $g_0 \in G$ vérifiant $\alpha(g_0) \neq \beta(g_0)$. Alors $G_\alpha \neq 1 \Rightarrow G_\beta \neq 1$, où $G_\gamma < G$ désigne le fixateur de $\gamma \in \{G \rightarrow X\}$.*

FIG. 1. Représentations de $G(e, e, r)$ comme colliers.

Il n'est pas difficile d'en déduire que la restriction à $G(e, e, r - 1)$ d'un composant irréductible d'un $(\lambda_0, \dots, \lambda_{e-1})$ de $\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$ -fixateur non trivial est sans multiplicités. On peut donc supposer que la représentation de $G(e, e, r)$ considérée correspond à un collier sans symétrie. La question des multiplicités se reformule alors de la façon suivante : est-il possible d'obtenir à partir d'un même collier, deux colliers identiques, en changeant une perle en deux endroits différents ? Plus précisément, en ayant comme ici un ordre sur les perles, est-il possible que ce phénomène se produise si les perles sont changées en des perles « plus petites » ?

La réponse est oui, et un exemple typique d'un tel phénomène est illustré par le dessin suivant :



Des composants de multiplicité 2 apparaissent donc de façon systématique. En revanche, des résultats combinatoires sur les colliers permettent de montrer que l'on ne peut avoir « pire ». En d'autres termes :

THÉORÈME. *Les restrictions des représentations irréductibles de $G(de, e, r)$ à $G(de, e, r - 1)$ admettent des composants irréductibles de multiplicité au plus 2.*

En examinant les groupes exceptionnels, on en déduit un analogue tout aussi étrange à la propriété des groupes de Coxeter mentionnée plus haut.

COROLLAIRE. *Si W est un groupe de réflexions complexes irréductibles, alors W admet un sous-groupe parabolique maximal irréductible W_0 tel que, pour tout $\rho \in \text{Irr}(W)$, la restriction de ρ à W_0 admet des multiplicités au plus 2, sauf pour W de type G_{22} ou G_{27} , pour lesquels des multiplicités 3 peuvent apparaître.*

CHAPITRE 5

Représentations de Krammer

1. Introduction

L'un des résultats les plus marquants obtenu sur le groupe de tresses ordinaires ces dix dernières années est sa linéarité. Plus précisément, pour $W = \mathfrak{S}_n$, il existe une représentation linéaire *fidèle*

$$R_K : B \rightarrow \mathrm{GL}_{n(n-1)/2}(\mathbb{Q}[q, q^{-1}, t, t^{-1}]).$$

Ce résultat a été montré pour $n = 4$ et conjecturé pour tout n par D. Krammer. Cette conjecture a été ensuite démontrée par S. Bigelow puis D. Krammer, par deux méthodes très différentes, dans l'année qui a suivi (voir [Kr1, Bi, Kr2]).

La représentation R_K était connue depuis une dizaine d'années. C'est une représentation de l'algèbre de Birman-Wenzl-Murakami et d'ailleurs, dans [BW], J. Birman et H. Wenzl posent explicitement la question de sa fidélité pour $n = 4$. Peu après, R. Lawrence retrouve cette représentation par une construction homologique. Dans ma thèse de doctorat, j'ai également proposé une autre construction de cette représentation.

Notons au passage que la façon la plus simple de montrer l'équivalence de ces différentes constructions est sans doute de profiter des propriétés de rigidité de l'algèbre de Hecke associée au groupe de réflexion complexe exceptionnel G_4 (voir [14]), dont le groupe de tresses est le groupe de tresses ordinaire à 4 brins.

Mais le résultat essentiel est bien sûr celui de la fidélité de R_K . La construction algébrique de cette représentation a été étendue indépendamment par F. Digne [Di] d'une part, A. Cohen et D. Wales [CW] d'autre part, au cas où W est un groupe de Coxeter « simplement enlacé », c'est-à-dire de type ADE. Par les mêmes arguments que D. Krammer, ils en ont également montré la fidélité, définissant ainsi une représentation fidèle

$$R_K : B \hookrightarrow \mathrm{GL}_N(\mathbb{Q}[q, q^{-1}, t, t^{-1}])$$

où $N = |\mathcal{A}|$ est le nombre d'hyperplans de réflexions de W , pour un tel groupe de Coxeter.

Ce résultat suffit à démontrer la linéarité de B quand W est un groupe de Coxeter, en utilisant des arguments plus ou moins ad-hoc. Dans le cas général, la question de la linéarité reste ouverte (sauf en rang 2, où elle découle de celle d'un groupe libre). On rappelle que, pour ce problème, on peut supposer que W est un groupe de 2-réflexions, ce que l'on fera dans ce chapitre sauf mention du contraire, et à l'exception du §5 qui étudie le groupe P .

Les résultats présentés ici sont essentiellement de deux ordres :

- (1) Généralisation de cette représentation à tous les groupes de 2-réflexions complexes
- (2) Applications en théorie des groupes.

Naturellement, des résultats de théorie des représentations ne permettent d'obtenir des résultats sur le groupe que si l'on dispose d'une représentation fidèle. Nous établissons donc des résultats généraux sous l'hypothèse de la fidélité de la représentation construite, et inconditionnellement pour des W particuliers (dont les groupes de Coxeter).

2. Définition

Commençons par une motivation pour $W = \mathfrak{S}_n$. Par construction, pour un ensemble dense de valeurs des paramètres considérés, les représentations de l'algèbre de Birman-Wenzl-Murakami sont en « dualité » avec des représentations du groupe quantique $U_q \mathfrak{osp}(V)$ pour $\mathfrak{osp}(V)$ une algèbre de Lie simple de type orthogonal ou symplectique. Le théorème de Kohno-Drinfeld assure alors que ces représentations sont équivalentes à des représentations de monodromie, qui correspondent à certaines représentations de $\mathcal{T}$. Ces représentations se factorisent par un morphisme d'algèbres de Lie de $\mathcal{T}$ vers l'algèbre (des diagrammes) de Brauer.

On rappelle que l'algèbre de Brauer $Br_n(m)$ admet pour base certains types de diagrammes reliant entre eux n sommets en haut et n sommets en bas. D'autre part, pour $W = \mathfrak{S}_n$, les générateurs de l'algèbre de Lie $\mathcal{T}$ peuvent s'écrire t_{ij} pour $1 \leq i < j \leq n$, un tel élément correspondant à l'hyperplan $z_i = z_j$. Le morphisme $\mathcal{T} \rightarrow Br_n$ s'écrit $t_{ij} \mapsto s_{ij} - p_{ij}$ où

$$s_{ij} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & i & & & & j \\ & & \diagdown & & \diagup & & \\ | & | & & & & & | \\ & & \diagup & & \diagdown & & \\ & & i & & & & j \end{array} \end{array} \quad p_{ij} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & i & & & & j \\ & & \cup & & \cup & & \\ | & | & & & & & | \\ & & \cap & & \cap & & \\ & & i & & & & j \end{array} \end{array}$$

Par définition de l'algèbre de Brauer, on a $p_{ij}^2 = m p_{ij}$.

Supposons maintenant que W est un groupe de Coxeter de type ADE . On cherche à définir une représentation $\varphi : \mathcal{T} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{CA})$ compatible avec la représentation de permutation $\rho : W \rightarrow GL(\mathbb{CA})$. Pour simplifier les notations, on note $t_s = t_H$ pour $H = \text{Ker}(s - 1)$, et on note $(v_s)_{s \in \mathcal{R}}$ la base naturelle de $\mathbb{CA}$.

Par analogie avec l'algèbre de Brauer, on trouve la formule qui suit en cherchant une représentation de la forme $\varphi(t_s) = \rho(s) - p_s$, avec p_s^2 un multiple de p_s et p_s d'image $\mathbb{C}v_s$.

La démonstration de la proposition suivante (voir [14]) s'appuie sur le fait que, en type ADE , un couple (s, u) de réflexions distinctes engendre un groupe diédral de type de Coxeter $I_2(2)$ ou $I_2(3)$, exclusivement.

PROPOSITION. *Soit W un groupe de Coxeter de type ADE. Il existe une représentation $\varphi : \mathcal{T} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{CA})$ compatible avec ρ déterminée par*

$$\begin{aligned} t_s.v_s &= mv_s \\ t_s.v_u &= v_{sus} - v_s \quad \text{si } su \neq us \\ t_s.v_u &= v_u \quad \text{si } su = us, s \neq u \end{aligned}$$

On en déduit une famille de représentations de monodromie $R : B \rightarrow \mathrm{GL}_N(K)$ pour $K = \mathbb{C}((h))$, pour laquelle les réflexions tressées ont une image $R(\sigma)$ de polynôme minimal cubique.

Dans ce qui suit, pour simplifier l'exposition, on dira que deux représentations R_1, R_2 sont égales ou isomorphes à *renormalisation près* si R_1 est égale ou isomorphe à $R_2 \otimes \chi$ pour un certain $\chi \in \mathrm{Hom}(B, K^\times)$.

Le résultat principal de [14] est alors que R donne une construction monodromique de la représentation de Krammer en type ADE. Il s'appuie sur l'existence d'une algèbre de Birman-Wenzl-Murakami découverte par Cohen, Gijsbers et Wales dans [CGW].

THÉORÈME. *Supposons $m \notin \mathbb{Q}$. Il existe un plongement $\mathbb{Q}(q, t) \hookrightarrow K$ tel que R soit isomorphe, à renormalisation près, à R_K après extension des scalaires. En particulier, R est fidèle.*

3. Généralisation aux groupes de réflexions complexes

Dans [16] on a trouvé une généralisation de la construction précédente à tout groupe de 2-réflexions complexes. Il est notable que les résultats qui suivent sont démontrés par des preuves « générales », c'est-à-dire qui n'utilisent pas la classification de Shephard-Todd.

Pour $s, u \in \mathcal{R}$ avec $s \neq u$, on note

$$\alpha(s, u) = |\{y \in \mathcal{R} \mid ysy = u\}| = |\{y \in \mathcal{R} \mid ysy^{-1} = u\}|.$$

On montre alors

THÉORÈME. *Soit W un groupe de 2-réflexions complexes et $m \in \mathbb{C}$. Il existe une représentation $\varphi : \mathcal{T} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{CA})$ compatible avec ρ déterminée par*

$$\begin{aligned} t_s.v_s &= mv_s \\ t_s.v_u &= v_{sus} - \alpha(s, u)v_s \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

Pour un groupe de Coxeter de type ADE, on a $\alpha(s, u) \in \{0, 1\}$, et l'on retrouve dans ce cas les formules précédentes. D'autre part, si l'on écrit $\varphi(t_s) = \rho(t_s) - p_s$, on a encore $p_s^2 = (1 - m)p_s$ et p_s est, à un scalaire près, un projecteur sur $\mathbb{C}v_s$ qui est orthogonal par rapport à une forme quadratique intéressante sur $\mathbb{CA}$. Celle-ci est définie, pour $s \neq u$, par la forme bilinéaire

$$(v_s | v_s) = (1 - m), \quad (v_s | v_u) = \alpha(s, u).$$

Cette forme bilinéaire est bien symétrique car $\alpha(s, u) = \alpha(u, s)$. Elle est enfin invariante pour l'action de W , et contribue ainsi à une meilleure compréhension du W -module $\mathbb{CA}$, ce qui rejoint les travaux du chapitre précédent.

Si l'on subdivise $\mathcal{A}$ en classes de conjugaisons pour l'action de W , on a $\mathbb{C}\mathcal{A} = \bigoplus_{c \in \mathcal{A}/W} \mathbb{C}c$ comme W -module. Les sous-espaces $\mathbb{C}c$ sont clairement orthogonaux pour $(\mid)$, donc $(\mid) = \sum_{c \in \mathcal{A}/W} (\mid)_c$, où $(\mid)_c$ est la restriction, toujours W -invariante, de $(\mid)$ à $\mathbb{C}c$. Ainsi φ est somme directe de représentations $\varphi_c : \mathcal{T} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{C}c)$ pour $c \in \mathcal{A}/W$.

On introduit le nombre

$$N(c) = 1 + \sum_{u \in c \setminus \{s\}} \alpha(s, u) \in \mathbb{N},$$

dépendant a priori du choix d'un $s \in c$, mais dont il est immédiat de vérifier qu'il n'en dépend pas. On s'intéresse alors au discriminant de $(\mid)_c$ que l'on identifie par abus au déterminant de sa matrice dans la base naturelle.

PROPOSITION. *La forme bilinéaire symétrique $(\mid)_c$ est non-dégénérée pour tout m en dehors d'un nombre fini d'entiers algébriques absolument réels. Pour m réel avec $m > N(c)$, sa restriction à $\mathbb{R}c$ définit un produit scalaire euclidien. Enfin, le discriminant de $(\mid)_c$ est un polynôme en m unitaire (à signe près) qui admet $(m - N(c))$ comme facteur de multiplicité 1.*

Comme pour le nombre $\kappa(W)$ apparaissant dans le chapitre précédent, les entiers algébriques (conjecturés entiers) de la proposition précédente apparaissent ainsi comme des invariants numériques de W , non encore reliés à des invariants plus classiques.

A partir de cette propriété, on démontre alors le résultat suivant, qui déterminera l'enveloppe algébrique de $R(B)$.

PROPOSITION. *Pour presque tout $m \in \mathbb{C}$, les représentations φ_c sont irréductibles, et vérifient $\varphi_c(\mathcal{T}) = \mathfrak{gl}(\mathbb{C}c)$.*

Enfin, d'après le théorème du paragraphe précédent on sait que, pour $m \notin \mathbb{Q}$ et W un groupe de Coxeter de type ADE, la représentation R est fidèle. On considère maintenant le cas où W est un groupe diédral. A l'aide d'une spécialisation appropriée et en utilisant la fidélité de la représentation de Burau (généralisée) de ces groupes, prouvée par C. Squier dans [Sq], on a démontré dans [16] le résultat suivant.

THÉORÈME. *Si W est un groupe de Coxeter de type $I_2(2k+1)$, alors R est fidèle pour des valeurs génériques de m .*

Ceci suggère la conjecture suivante.

CONJECTURE 2. *Si W admet une seule classe de réflexions, alors R est fidèle pour des valeurs génériques de m .*

Notons que nous ne connaissons pas de contre-exemple à la même affirmation quand W admet plus d'une classe. Nous formulons néanmoins la conjecture avec cette restriction pour les raisons suivantes, développées dans les paragraphes suivants :

- le comportement algébrique de R semble plus uniforme dans le cas d'une seule classe (irréductibilité, et Zariski-densité de l'image dans un groupe linéaire)
- ce cas suffirait à démontrer les propriétés de théorie des groupes souhaitées pour l'ensemble des groupes de tresses complexes.

4. Zariski-densité et applications

On déduit des résultats de la section précédente la propriété suivante.

THÉORÈME. *Pour des valeurs génériques de m , R_c est irréductible et $R_c(P)$ (donc $R_c(B)$) est Zariski-dense dans $\mathrm{GL}(Kc)$. En particulier, $R_K(B)$ est Zariski-dense dans $\mathrm{GL}_N(\mathbb{Q}(q, t))$ pour W un groupe de Coxeter de type ADE.*

Si la conjecture 2 est vraie, le théorème implique que, pour tout W admettant une seule classe de réflexions, alors B se plonge de façon Zariski-dense dans un groupe linéaire $\mathrm{GL}_N(K)$ pour un certain N .

Pour les autres groupes, la classification des groupes de réflexions complexes et un certain nombre de plongements plus ou moins ad-hoc permettent de démontrer la propriété suivante. On rappelle qu'un groupe d'Artin-Tits (de type sphérique) est un groupe B associé à un groupe de Coxeter (fini) W .

PROPOSITION. *Si W est un groupe de pseudo-réflexions ayant plus d'une classe de réflexions (et en particulier si W n'est pas un groupe de 2-réflexions), alors B se plonge dans un groupe d'Artin-Tits de type sphérique comme sous-groupe d'indice fini.*

On utilise alors le fait que tout groupe d'Artin-Tits se plonge dans un groupe de type ADE – c'est ainsi que les résultats de Digne et Cohen-Wales montrent la linéarité de tous ces groupes. En étudiant la restriction de R_K par de tels plongement, on parvient dans [14] à étendre le théorème de Zariski-densité de $R_K(B)$ à ce cadre.

THÉORÈME. *Tout groupe d'Artin-Tits sphérique se plonge de façon Zariski-dense dans un certain $\mathrm{GL}_N(K)$.*

En conjuguant les deux résultats précédents, on obtient

THÉORÈME. *Si la conjecture 2 est vraie, alors B se plonge de façon Zariski-dense dans un certain $\mathrm{GL}_N(K)$ pour tout groupe de pseudo-réflexions W .*

Naturellement, la conjecture 2 en elle-même impliquerait la linéarité de tous les groupes de tresses complexes, avec la kyrielle d'applications qui accompagne cette propriété : résiduelle finitude, propriété de Hopf, etc. L'identification à un sous-groupe Zariski-dense de $\mathrm{GL}_N(K)$ quant à elle a les conséquences exposées dans les paragraphes suivants.

Les résultats des paragraphes suivants sont énoncés sous l'hypothèse que, soit W est un groupe de Coxeter fini irréductible, soit W est irréductible et la conjecture 2 est vraie.

4.1. Propriété de Long. En 1985, D. Long montre dans [Lo] que le groupe de tresses ordinaire et les groupes modulaires de surfaces (mapping class groups) sont des groupes G qui vérifient la propriété suivante :

- (L) Si N_1, N_2 sont deux sous-groupes normaux de G non inclus dans son centre $Z(G)$, alors $N_1 \cap N_2$ n'est pas inclus dans $Z(G)$.

La démonstration de Long s'appuie sur la classification de Nielsen-Thurston des difféomorphismes des surfaces, et son argument essentiel est qu'il existe suffisamment de classes pseudo-Anosov dans tout sous-groupe normal non inclus dans le centre. Elle n'est donc pas adaptable a priori au cadre qui nous intéresse ici.

La propriété de Zariski-densité permet de donner une autre démonstration de cette propriété, qui se généralise à notre cadre, et s'applique à de nombreux sous-groupes. Nous nous contentons ici de mentionner le cas des sous-groupes d'indice fini.

THÉORÈME. *Le groupe B ainsi que ses sous-groupes d'indice fini vérifient la propriété (L). En particulier si, pour un tel groupe G , $G = N_1 \times N_2$, alors $N_1 \subset Z(G)$ ou $N_2 \subset Z(G)$.*

Cette dernière propriété de « presque » indécomposabilité comme produit direct avait été démontrée par L. Paris pour $G = B$ et W un groupe de Coxeter fini, par de toutes autres méthodes (voir [Pa]).

Un autre exemple d'application de la propriété de Long est fourni par des critères de fidélité. Dans le cas du groupe de tresses ordinaires, elle permet de ramener le problème de fidélité d'une représentation donnée à la fidélité de sa restriction à un groupe libre. Elle permet aussi de montrer qu'il n'est essentiellement pas possible de fabriquer une représentation fidèle comme somme directe de deux représentations qui ne le sont pas. L'exemple le plus connu de cette dernière application est que la fidélité (espérée) de la représentation de Burau sur 4 brins est équivalente à celle de la représentation naturelle dans l'algèbre de Hecke de $\mathfrak{S}_4$.

4.2. Sous-groupes de Fitting et de Frattini. Le sous-groupe de *Fitting* $\text{Fit}(G)$ d'un groupe G est le sous-groupe engendré par ses sous-groupes normaux nilpotents. On a toujours $Z(G) \subset \text{Fit}(G)$. D'autre part, si G est Zariski-dense dans $\text{GL}_N(K)$, un sous-groupe nilpotent de G ne peut être normal à moins d'être inclus dans $Z(G)$. On en déduit

THÉORÈME. *Si G est un sous-groupe d'indice fini de B , alors $\text{Fit}(G) = Z(G)$.*

Le sous-groupe de *Frattini* $\Phi(G)$ d'un groupe G est l'intersection de ses sous-groupes maximaux. Le groupe de Frattini du groupe de tresses ordinaire a été calculé par Long dans le même article, en utilisant des arguments similaires à sa preuve de la propriété (L). Nous étendons ici ce résultat par notre méthode.

On note d'abord que, pour un groupe linéaire, un théorème de Platonov assure que $\Phi(G)$ est nilpotent. Comme il est normal, on a d'après ce qui précède $\Phi(G) \subset Z(G)$. Si l'on prend maintenant $B = G$, la connaissance de $Z(B)$ (sauf pour W de type G_{31} , pour lequel cette connaissance est toujours conjecturale) permet de déterminer $\Phi(B)$.

THÉORÈME. *Sauf peut-être pour G_{31} , le sous-groupe de Frattini de B est trivial.*

5. Propriétés résiduelles

Si $\mathcal{F}$ est une classe de groupes, on dit qu'un groupe G est *résiduellement* $\mathcal{F}$ si, pour tout $g \in G \setminus \{1\}$, G admet un quotient dans $\mathcal{F}$ pour lequel g est d'image non triviale.

Une telle propriété est particulièrement utile quand $\mathcal{F}$ est stable par sous-groupes, et quand être résiduellement $\mathcal{F}$ est équivalent à être *pleinement résiduellement* $\mathcal{F}$, c'est-à-dire

que pour r -uplet $(g_1, \dots, g_r)$ d'éléments distincts de G , G admet un quotient dans lequel l'image de ce r -uplet est formée d'éléments distincts. C'est le cas lorsque $\mathcal{F}$ est stable par produits finis.

Dire qu'un groupe est résiduellement $\mathcal{F}$ peut se formuler aussi en disant qu'il se plonge canoniquement dans sa complétion pro- $\mathcal{F}$, c'est-à-dire dans la limite projective de ses quotients dans $\mathcal{F}$.

En pratique, les propriétés les plus intéressantes apparaissent quand $\mathcal{F}$ est la classe

- des groupes finis
- des p -groupes finis, pour un p donné
- des groupes nilpotents
- des groupes nilpotents sans torsion.

En particulier, pour une variété algébrique complexe lisse, dire que le groupe fondamental est résiduellement fini équivaut à dire qu'il se plonge dans le groupe fondamental algébrique (ou « étale »), qui est sa complétion profinie. La question de sa résiduelle nilpotence-sans-torsion intervient dans les problèmes de type « Riemann-Hilbert » (voir par exemple [Ha]). Elle signifie essentiellement que le groupe fondamental se plonge dans le groupe fondamental rationnel (ou « de Rham ») de la variété considérée.

Notons qu'il est en général difficile de montrer que le groupe fondamental d'une variété donnée est résiduellement $\mathcal{F}$, mais tout autant de montrer qu'il ne l'est pas. Les conjectures en ce domaine sont donc très incertaines.

Pour des variétés géométriquement aussi simples que des complémentaires d'arrangements d'hyperplans, on s'attend à ce que la propriété résiduelle la plus forte soit vérifiée, à savoir la résiduelle nilpotence-sans-torsion. Cette dernière propriété implique que le groupe est résiduellement- p pour tout p , et en particulier résiduellement fini (qui est la propriété la plus faible parmi celles listées plus haut). A ma connaissance cependant, même la question de leur résiduelle finitude est encore ouverte.

Une autre série de conséquences de la résiduelle nilpotence-sans-torsion est reliée à la biordonnabilité, c'est-à-dire à l'existence d'un ordre total sur le groupe invariant par multiplication à droite et à gauche. Il est classique qu'un groupe nilpotent sans torsion est biordonnable. Comme la biordonnabilité est l'une des rares propriétés à être équivalente à sa version résiduelle, un groupe résiduellement nilpotent-sans-torsion est biordonnable. Parmi les propriétés des groupes biordonnables, on mentionnera simplement que la conjecture de Kaplansky (« zero-divisor conjecture ») est vraie pour ces groupes, et que ces groupes, en plus d'être sans torsion, ont des racines uniques ($g^n = h^n \Rightarrow g = h$ pour $n \neq 0$).

La résiduelle nilpotence-sans-torsion pour les groupes fondamentaux de complémentaires d'hyperplans était connue pour les arrangements dits super-résolubles. La démonstration repose sur un lemme de M. Falk et P. Randell concernant les extensions $1 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 1$ qui sont dites quasi-directes, c'est-à-dire scindées et telles que C agisse trivialement sur l'abélianisé de A . Pour de tels arrangements, le groupe fondamental apparaît par extensions successives de groupes libres ayant cette propriété, et le lemme de Falk et Randell assure, d'une part que l'intersection des termes de la suite centrale descendante $C^r \pi_1$ est triviale, et d'autre part que les quotients $\pi_1 / C^r \pi_1$ sont sans torsion (voir [FR, FR2]).

Cela suffit (mais n'est pas équivalent) à établir la résiduelle nilpotence-sans-torsion pour ces groupes.

Pour les arrangements de réflexions, les super-résolubles (ou : « fiber-type ») correspondent aux groupes $G(de, e, r)$ pour $d > 1$, au groupe symétrique $G(1, 1, r)$, et aux groupes de rang 2. En particulier, le cas des groupes de Coxeter de types $D_n, n \geq 4, E_6, E_7, E_8, F_4, H_3, H_4$ restait ouvert.

On a introduit ici un tout autre type d'argument, basé sur l'existence d'une représentation $R : B \rightarrow \mathrm{GL}_N(K)$ comme ci-dessus. Ces représentations sont en fait à valeurs dans $\mathrm{GL}_N(A)$, où $A = \mathbb{C}[[h]]$ et, lorsqu'elles proviennent directement d'une construction de monodromie, on vérifie facilement que $R(g) \equiv 1 \pmod{h}$ dès que $g \in P$. Une fois cette propriété vérifiée, il ne reste plus qu'à utiliser la fidélité de R et la résiduelle nilpotence-sans-torsion du groupe des matrices de $\mathrm{GL}_N(A)$ congrues à 1 modulo h , c'est-à-dire $1 + h\mathrm{Mat}_N(A)$, pour conclure à la résiduelle nilpotence-sans-torsion de P . En vérifiant la compatibilité des plongements classiques, utilisés plus haut, avec la réduction modulo h , on obtient le résultat suivant (voir [14, 15]).

THÉORÈME. *Si W est un groupe de Coxeter fini, alors P est résiduellement nilpotent-sans-torsion.*

Pour de nombreux groupes de pseudo-réflexions complexes, la résiduelle nilpotence-sans-torsion découle de la super-résolubilité de leur arrangement. En dehors des groupes de Coxeter déjà traités, ne restent donc que des groupes de 2-réflexions et trois groupes de Shephard exceptionnels, numérotés G_{25}, G_{26} et G_{32} . Leurs diagrammes sont les suivants.

$$G_{25} \quad \begin{array}{c} \textcircled{3} \text{---} \textcircled{3} \text{---} \textcircled{3} \\ s \quad t \quad u \end{array} \qquad G_{26} \quad \begin{array}{c} \textcircled{2} \text{=} \textcircled{3} \text{---} \textcircled{3} \\ s \quad t \quad u \end{array} \qquad G_{32} \quad \begin{array}{c} \textcircled{3} \text{---} \textcircled{3} \text{---} \textcircled{3} \text{---} \textcircled{3} \\ s \quad t \quad u \quad v \end{array}$$

Les groupes G_{25} et G_{32} ont pour B un groupe de tresses ordinaire. En utilisant des plongements adéquats de $\mathbb{Q}(q, t)$ dans $K = \mathbb{C}[[h]]$, on parvient à plonger P dans $1 + hM_N(A)$ à l'aide de la représentation de Krammer R_K . Pour traiter le cas du groupe G_{26} , nous montrons l'existence d'un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} B_{25} & \longleftarrow & B_{26} \\ \downarrow & & \downarrow \\ W_{25} & \longleftarrow & W_{26} \end{array}$$

(notations évidentes). En particulier,

PROPOSITION. *Le groupe pur de type G_{26} se plonge dans le groupe pur de type G_{25} .*

Ce dernier résultat apporte une pierre supplémentaire aux similarités connues entre les deux arrangements correspondants (pour lesquels nous renvoyons à [Co]), qui sont les deux arrangements liés à ce que l'on appelle la « configuration Hessienne ». Il permet d'autre part de conclure le cas des groupes de Shephard, c'est-à-dire les groupes de symétries d'un polytope complexe régulier.

THÉORÈME. *Si W est un groupe de Shephard, alors P est résiduellement nilpotent-sans-torsion.*

Le problème se ramène donc bien au cas des groupes de 2-réflexions qui ne sont pas des groupes de Coxeter. Comme la fidélité de R implique la possibilité de plonger P dans $1 + h\text{Mat}_N(A)$, on en déduit la conséquence suivante.

THÉORÈME. *Si la conjecture 2 est vraie, alors P est résiduellement nilpotent-sans-torsion pour tout groupe de pseudo-réflexions complexes W .*

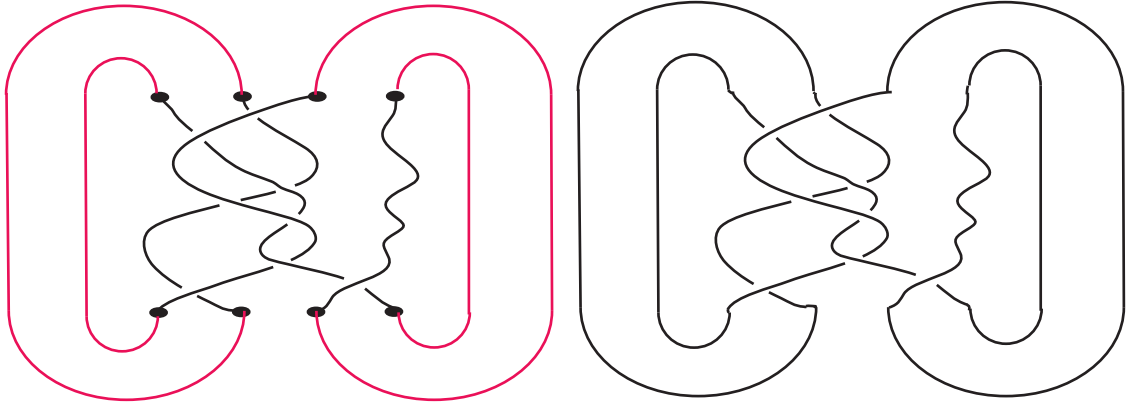
6. Applications en théorie des noeuds

Pour $W = \mathfrak{S}_n$, B est le groupe de tresses à n brins, et le résultat de Zariski-densité est potentiellement utile en théorie des noeuds et entrelacs. Il est complété par le fait que, pour q et t proches de 1 et de module 1, la représentation R_K est unitarisable.

Ce résultat d'unitarisabilité a été obtenu par R. Budney dans [Bu] par des méthodes topologiques, mais il se déduit tout aussi bien des méthodes du chapitre 2. En effet, la forme bilinéaire $(\mid)$ définie plus haut montre que, pour tout W , la représentation R est unitarisable formellement, ce qui suggère qu'elle est unitarisable pour h et m réels proches de 0, au moins si la conjecture 1 est vraie. Pour $W = \mathfrak{S}_n$ on peut en tout cas utiliser les assocateurs de Drinfeld pour démontrer cette propriété (cf. [14]).

Une conséquence est donc que, pour q et t complexes de module 1 proches de 1, et q, t algébriquement indépendants, $R_K(B) \simeq B$ est dense dans un groupe unitaire $U_{n(n-1)/2}$.

Une application de ces propriétés est due à A. Stoimenow (voir [Sto]). On sait qu'un entrelacs L peut toujours être obtenu par la clôture $\hat{\beta}$ d'une tresse $\beta \in B$ sur un certain nombre n de brins. Cette opération de clôture est rappelée dans la figure suivante.



L'index de tressage $b(L)$ de L est la valeur minimale de n . Il est clair que deux tresses conjuguées dans B donnent lieu au même entrelacs. Un problème classique concerne le nombre de classes de conjugaisons dans B qui peuvent avoir pour clôture un même entrelacs L . En utilisant ces propriétés de densité, il est montré dans [Sto] que ce nombre est infini, pourvu que $n > b(L)$ et que $n \geq 4$, sauf peut-être pour L dans une certaine classe de noeuds « toriques ».

Bibliographie

Travaux présentés pour l'habilitation.

Chapitre 2.

- [1] I. Marin, *Irréductibilité générique des produits tensoriels de monodromies*, Bull. Soc. Math. Fr. **132**, 201-232 (2004).
- [2] I. Marin, *On the representation theory of braid groups*, preprint arxiv :RT/0502118 (v3), 2005.
- [3] I. Marin, *Monodromie algébrique des groupes d'Artin diédraux*, J. Algebra **303**, 97-132 (2006).
- [4] I. Marin, *Caractères de rigidité du groupe de Grothendieck-Teichmüller*, Compos. Math. **142**, 657-678 (2006).
- [5] I. Marin, *Characters of the Grothendieck-Teichmüller group through rigidity of the Burau representation*, à paraître dans Ann. Fac. Sci. Toulouse, 2008.

Chapitre 3.

- [6] I. Marin, *Infinitesimal Hecke Algebras*, Comptes Rendus Mathématiques **337** Série I, 297-302 (2003).
- [7] I. Marin, *L'algèbre de Lie des transpositions*, J. Algebra **310** (2007), 742-774.
- [8] I. Marin, *Group algebras of finite groups as Lie algebras*, preprint arxiv :math/0809.0074, to appear in Comm. Algebra.
- [9] I. Marin, *Infinitesimal Hecke Algebras II*, preprint 2009.
- [10] I. Marin, *Infinitesimal Hecke Algebras III*, preprint 2009.

Chapitre 4.

- [11] I. Marin, J. Michel, *Automorphisms of complex reflection groups*, preprint arxiv :math/0701266.
- [12] I. Marin, *Branching properties for the groups $G(de, e, r)$* , preprint arxiv :0711.1845 (v2).
- [13] I. Marin, *Reflection groups acting on their hyperplanes*, preprint 2008.

Chapitre 5.

- [14] I. Marin, *Sur les représentations de Krammer génériques*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **57**, 1883-1925 (2007).
- [15] I. Marin, *On the residual nilpotence of pure Artin groups*, J. Group Theory **9** 483-485 (2006).
- [16] I. Marin, *Krammer representations for complex braid groups*, preprint arxiv :math/0711.3096.

Autres travaux.

- [17] I. Marin, *Représentations linéaires des tresses infinitésimales*, thèse de l'université Paris XI-Orsay, 2001.
- [18] I. Marin, *Une caractérisation tensorielle des représentations standard*, Expo. Math. **18**, 245-254 (2000).

- [19] I. Marin, *On $\mathfrak{S}_n$ -irreducible KZ-systems*, C.R.A.S. **333**, 517-522 (2001).
- [20] I. Marin, *Quotients infinitésimaux du groupe de tresses*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **53** (2003), 1323–1364.
- [21] I. Marin, *Caractérisations de la représentation de Burau*, Expo. Math. **21**, 263-278 (2003).
- [22] I. Marin, *Eléments de Jucys-Murphy généralisés*, Comm. Algebra **33**, 2879-2898 (2005).
- [23] C. Blanchet, I. Marin, *Cabling the Burau representation*, preprint 2006.
- [24] I. Marin, *Strongly indecomposable finite groups*, Expo. Math. **26**, 261-267 (2008).

Références externes.

- [AF] M. Abdulrahim, E. Formanek, *Tensor products of specializations of the Burau representation*, J. Pure Appl. Algebra **203**, 104-112 (2005).
- [Art] M. Artin, *On the Solutions of Analytic Equations*, Invent. Math. **5** 277-291 (1968).
- [Bd] M. Benard, *Schur indices and splitting fields of the unitary reflection groups*, J. Algebra **38**, 318-342 (1976).
- [Bes] D. Bessis, *Sur le corps de définition d'un groupe de réflexions complexe*, Comm. Algebra **25**, 2703–2716 (1997).
- [Bi] S. Bigelow, *Braid groups are linear*, J. Am. Math. Soc. **14**, 471-486 (2001).
- [BW] J.S. Birman, H. Wenzl, *Braids, Link polynomials and a new algebra*, Trans. AMS **313** 249-273 (1989).
- [BMM] M. Broué, G. Malle, J. Michel, *Toward Spetses I*, Transform. Groups **4**, 157-218 (1999).
- [BMR] M. Broué, G. Malle, R. Rouquier, *Complex reflection groups, braid groups, Hecke algebras*, J. Reine Angew. Math. **500**, 127-190 (1998).
- [Bu] R. Budney, *On the image of the Lawrence-Krammer representation*, J. Knot Theory Ramifications **14**, 773–789 (2005).
- [Cn1] K.T. Chen, *Formal differential equations*, Annals of Math. **73**, 110-133 (1961).
- [Cn2] K.T. Chen, *Algebras of iterated path integrals and fundamental groups*, Trans. Am. Math. Soc. **156**, 359-379 (1971).
- [Ck] I. Cherednik, *Calculation of the monodromy of some W -invariant local systems of type B, C and D* , Funktsional. Anal. i Prilozhen. **24**, 88–89 (1990), english translation in Funct. Anal. Appl. **24**, 78–79 (1990).
- [Cy] C. Chevalley, *Théorie des groupes de Lie*, vol. 2-3, Hermann, Paris, 1961.
- [CGW] A.M. Cohen, D.A.H. Gijsbers, D.B. Wales, *BMW Algebras of simply laced type*, J. Algebra **286**, 107-153 (2005).
- [CT] A.M. Cohen, D.E. Taylor, *On a certain Lie algebra defined by a finite group*, Amer. Math. Monthly **114**, 633-639 (2007).
- [CW] A.M. Cohen, D.B. Wales, *Linearity of Artin groups of finite type*, Israel J. Math. **131**, 101-123 (2002).
- [CHL] W. Couwenberg, G. Heckman, E. Looijenga, *Geometric structures on the complement of a projective arrangement*, Publ. Math. I.H.E.S. **101**, 69–161 (2005).
- [Co] H.S.M. Coxeter, *Regular complex polytopes*, 2nd edition, Cambridge University Press, 1991.
- [Pa] L. Paris, *Artin groups of spherical type up to isomorphism*, J. Algebra **281**, 666–678 (2004).
- [Di] F. Digne, *On the linearity of Artin braid groups*, J. Algebra **268**, 39-57 (2003).

- [Dr] V.G. Drinfeld, *On quasitriangular quasi-Hopf algebras and a group closely connected with $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$* , Leningrad Math. J. **2**, 829-860 (1991).
- [Du] C.F. Dunkl, *Differential-difference operators associated to reflection groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **311**, 167–183 (1989).
- [DO] C.F. Dunkl, E.M. Opdam, *Dunkl operators for complex reflection groups*, Proc. London Math. Soc. **86**, 70–108 (2003).
- [En] B. Enriquez, *Quasi-reflection algebras and cyclotomic associators*, Selecta Math. (N.S.) **13**, 391-463 (2007).
- [FR] M. Falk, R. Randell, *The lower central series of a fiber-type arrangement*, Invent. Math. **82**, 77–88 (1985).
- [FR2] M. Falk, R. Randell, *Pure braid groups and products of free groups*, in *Braids*, Contemporary Mathematics **78**, 217-228, A.M.S., Providence, 1988.
- [FLW] M. Freedman, M. Larsen, Z. Wang, *The two-eigenvalue problem and density of Jones representation of braid groups*, Comm. Math. Phys. **228**, 177–199 (2002).
- [GL] J. González-Lorca, *Série de Drinfeld, monodromie et algèbres de Hecke*, Thèse Paris XI-Orsay, 1998.
- [Ha] R. Hain, *On a generalization of Hilbert’s 21st problem*, Ann. Sci. E.N.S. **19**, 609–627 (1986).
- [IS] H. Ichimura, K. Sakaguchi, *The non-vanishing of a certain Kummer character χ_m (after C. Soulé), and some related topics*, in ‘Galois representations and arithmetic algebraic geometry’, Proc. Symp., Kyoto 1985 and Tokyo 1986, Adv. Stud. Pure Math. **12**, 53-64 (1987).
- [Ko] T. Kohno, *On the holonomy Lie algebra and the nilpotent completion of the fundamental group of the complement of hypersurfaces*, Nagoya Math. J. **92**, 21-37 (1983).
- [Kr1] D. Krammer, *The braid group B_4 is linear*, Invent. math. **142**, 451-486 (2000).
- [Kr2] D. Krammer, *Braid groups are linear*, Annals of Math. **155**, 131-156 (2002).
- [Lo] D. Long, *A note on the normal subgroups of mapping class groups*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **99**, 79-87 (1986).
- [NS] H. Nakamura, L. Schneps, *On a subgroup of the Grothendieck-Teichmüller group acting on the tower of profinite Teichmüller modular groups*, Invent. Math. **141**, 503-560 (2000).
- [ST] G.C. Shephard, J.A. Todd, *Finite unitary reflection groups*, Canad. J. Math **6**, 274-304 (1954).
- [Sq] C.G. Squier, *Matrix representations of Artin groups*, Proc. Am. Math. Soc. **103**, 49-53 (1988).
- [Ste] R. Steinberg, *Differential equations invariant under finite reflection groups*, Trans. A.M.S. **112**, 392-400 (1964).
- [Sto] A. Stoimenow, *The density of Lawrence-Krammer and non-conjugate braid representations of links*, arxiv :math/0809.0033.
- [Wz] H. Wenzl, *Hecke algebras of type A_n and subfactors*, Invent. Math. **92**, 349–383 (1988).