Caractérisations de la représentation de Burau

Ivan Marin

9 septembre 2002

Abstract. This paper is devoted to characterizations of the (reduced) Burau representation of the Artin braid group, in terms of rigid local systems. We prove that the Burau representation is the only representation of the Hecke algebra for which some local system associated to every linear representation of the braid group is irreducible and rigid in the sense of Katz. We also use previous results to give a characterization of the corresponding Knizhnik-Zamolodchikov system.

1 Introduction

La représentation de Burau [Bu36] est la première représentation non triviale connue du groupe de tresses, et également la plus étudiée. Elle donne lieu au premier des invariants polynomiaux des nœuds, le polynôme d'Alexander. Elle fut également la première à être munie d'une structure unitaire [Sq84], et la première pour laquelle ont été démontrés des résultats de (non-)fidélité. Elle intervient d'autre part dans de nombreuses constructions de représentations du groupe de tresses, comme la construction d'induction de Long [Lo94].

Nous présentons ici une caractérisation de cette représentation parmi les représentations irréductibles du groupe de tresses. On savait déjà caractériser cette représentation à partir de sa dimension, puisque c'est la « plus petite » des représentations non triviales du groupe de tresses [Fo97]. L'originalité des résulats présentés ici est, d'abord qu'ils ne font pas intervenir cette dimension, ensuite qu'ils prennent appui sur une théorie connexe, celle des systèmes locaux rigides.

Le point de vue présenté s'appuie en effet sur l'existence d'un sous-groupe (sous-normal) du groupe de tresses qui est isomorphe à un groupe libre. On peut caractériser les représentations du groupe de tresses issues de l'algèbre de Hecke de type A à partir du spectre d'un des générateurs d'Artin, et nous montrons que les représentations irréductibles de l'algèbre de Hecke sont déjà irréductibles pour l'action de ce sous-groupe libre. Un invariant important pour ces représentations irréductibles d'un groupe libre, apparu récemment, est alors l'index de rigidité de Katz. Il permet notamment de déterminer certaines représentations remarquables du groupe libre, dites rigides (physiquement rigides, linéairement rigides selon les auteurs). Nous montrons ainsi que les seules représentations irréductibles de l'algèbre de Hecke qui sont rigides pour l'action de ce sous-groupe sont les représentations de Burau, et on obtient ainsi une première caractérisation

Théorème 1. *Soit $n \geq 3$. Pour des valeurs génériques de $q \in \mathbb{C}$, les seules représentations de $H_n(q)$ qui sont irréductibles et rigides sous l'action du groupe libre sont, soit de dimension 1, soit des représentations de Burau.*

On remarque plus loin que les représentations de dimension 1 ont également une caractérisation très simple en terme de rigidité. On peut également les caractériser à partir du spectre des générateurs d'Artin. Cette caractérisation est donc bien essentiellement indépendante de la dimension.

Les représentations de Burau, comme plus généralement les représentations de l'algèbre de Hecke, peuvent s'obtenir comme monodromie d'un système de Knizhnik-Zamolodchikov (KZ) symétrique (voir plus loin). Nous appelons « système de Burau » le système KZ classiquement associé à la représentation de Burau. En s'appuyant sur un résultat précédent, on démontre une deuxième caractérisation

Théorème 2. *Les seuls systèmes KZ symétriques $\mathfrak{S}_n$-irréductibles et rigides sont les systèmes de Burau.*

Notations
De façon générale, si P désigne une (in)égalité, on définit $(P) = 1$ si P est vraie, $(P) = 0$ si P est faux. Un diagramme de Young est une suite décroissante $(\lambda_i)_{i\geq 1}$ d'entiers naturels dont presque tous les termes sont nuls. On définit

$$\begin{array}{rcl} |\lambda| & = & \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \\ \delta(\lambda) & = & \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i \neq \lambda_{i+1}) \\ h(\lambda) & = & \sup\{r \mid \lambda_r \neq 0\} \end{array}$$

Le nombre $|\lambda|$ est appelé la taille de λ, $\delta(\lambda)$ son nombre de décrochements, $h(\lambda)$ sa longueur. On dit que λ est une partition de $|\lambda|$. On note λ' la partition duale de λ, définie par $\lambda'_i = \#\{j \mid \lambda_j \geq i\}$. On notera encore $\dim(\lambda)$ la dimension de la représentation du groupe symétrique associée à λ, $A_+(\lambda)$ (resp. $A_-(\lambda)$) la multiplicité de 1 (resp. -1) dans le spectre, sur cette représentation, d'une transposition quelconque. On a $A_+(\lambda) + A_-(\lambda) = \dim(\lambda)$.

2 Généralités

2.1 Algèbres de Hecke et groupe de tresses

On rappelle que le groupe d'Artin B_n peut être défini, pour tout $n \geq 2$, par générateurs $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ et relations

$$\begin{array}{cc} \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i & |i-j| \geq 2 \\ \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} & 1 \leq i \leq n-2 \end{array}$$

Le groupe d'Artin admet comme sous-groupe distingué le groupe des tresses pures P_n, noyau du morphisme $B_n \to \mathfrak{S}_n$ défini par $\sigma_i \mapsto (i\, i{+}1)$, où $\mathfrak{S}_n$ désigne le groupe symétrique sur n lettres et $(i\ j)$ la transposition de i et j. Un système de générateurs de P_n est fournit, pour $1 \leq i < j \leq n$, par

$$\gamma_{ij} = \sigma_i \sigma_{i+1} \dots \sigma_{j-2} \sigma_{j-1}^2 \sigma_{j-2}^{-1} \dots \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^{-1}.$$

L'algèbre de Hecke $H_n(q)$ de type A est un quotient remarquable de $\mathbb{C}B_n$. On fixe un nombre complexe non nul q, et on considère l'algèbre quotient de $\mathbb{C}B_n$ par les relations

$$(\sigma_i - q)(\sigma_i + q^{-1}) = 0$$

pour $1 \leq i \leq n-1$. Pour $q = 1$, on retrouve le quotient $\mathbb{C}B_n \to \mathbb{C}\mathfrak{S}_n$. Si q n'est pas une racine de l'unité, il est classique que $H_n(q) \simeq \mathbb{C}\mathfrak{S}_n$. De plus, si n est fixé, $H_n(q) \simeq \mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ pour des valeurs génériques de q, c'est-à-dire dans un certain ouvert de Zariski non vide de $\mathbb{C}$. On a en particulier une correspondance entre représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_n$ et représentations irréductibles de $H_n(q)$. On peut expliciter cette correspondance de façon très naturelle en termes de représentations de monodromie (systèmes KZ).

2.2 Monodromie

2.2.1 Systèmes Fuchsiens

Un système Fuchsien (sur $\mathbb{CP}^1$) est la donnée d'une 1-forme méromorphe sur $\mathbb{CP}_1$ à valeurs dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(V)$ des endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie V, qui s'écrit sous la forme

$$\omega(z) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{z - \alpha_i} \right) \mathrm{d}z$$

où $a_i \in \mathfrak{gl}(V)$, $a_1 + \ldots + a_n = 0$, et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{CP}^1$ sont deux à deux distincts. Pour simplifier, on suppose que $\omega(z)$ n'admet pas de pôle à l'infini, i.e. $\alpha_i \neq \infty$, et on fixe une fois pour toute la famille des α_i. Un système Fuchsien s'identifie donc à un n-uplet $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ d'éléments de $\mathfrak{gl}(V)$ qui vérifie $a_1 + \ldots + a_n = 0$. Remarquons que les systèmes Fuchsiens forment, dans $\mathfrak{gl}(V)^n$, un sous-espace vectoriel. En particulier, on notera, pour $h \in \mathbb{C}$, $h\underline{a} = (ha_1, \ldots, ha_n)$.

A tout système Fuchsien est associé par monodromie, après choix d'un point base, une représentation du groupe fondamental de la sphère privée de n points, c'est-à-dire du groupe libre sur $n-1$ générateurs. Plus précisément, on choisit un point base quelconque, et des lacets $c_1, ..., c_n$ tels que c_i soit homotope au lacet trivial dans $\mathbb{CP}^1 \setminus \{\alpha_i \mid j \neq i\}$, d'indice 1 par rapport à α_i, et tels qu'une présentation du groupe fondamental considéré se résume à la relation

$$c_1 c_2 \dots c_{n-1} c_n = 1.$$

La monodromie d'un tel système est alors formée d'un n-uplet $(A_1, \ldots, A_n) \in GL(V)$ vérifiant $A_1 \ldots A_n = 1$. Ici, A_i désigne la monodromie de $\omega(z)$ le long du lacet c_i. Il est classique, depuis Fuchs, que A_i est conjugué à $\exp(2i\pi a_i)$ dès que a_i est semi-simple et que, pour tous $\lambda, \mu \in Sp(a_i)$, $\lambda - \mu \notin \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

2.2.2 Systèmes KZ

On note
$$\mathbb{C}_*^n = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}_n^* \;\mid\; z_i \neq z_i \Leftrightarrow i \neq j\}$$
l'espace des n-uplets de complexes deux à deux distincts. Cet espace est muni d'une action naturelle de $\mathfrak{S}_n$ par permutation des composantes, $P_n = \pi_1(\mathbb{C}_*^n)$, $B_n = \pi_1(\mathbb{C}_*^n/\mathfrak{S}_n)$. Un système KZ est la donnée de $n(n-1)/2$ endomorphismes t_{ij} de $\mathfrak{gl}(V)$, où $1 \leq i, j \leq n$, $t_{ij} = t_{ji}$ et $t_{ii} = 0$, tels que la 1-forme, également appelée système KZ,

$$\omega(z) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} t_{ij} \frac{\mathrm{d}z_i - \mathrm{d}z_j}{z_i - z_j}$$

soit intégrable. La condition d'intégrabilité est celle des tresses infinitésimales pures

$$\begin{array}{ll} [t_{ij}, t_{kl}] = 0 & \#\{i, j, k, l\} = 4 \\ [t_{ij}, t_{ik} + t_{kj}] = 0 & \end{array}$$

Les systèmes KZ, contrairement aux systèmes Fuchsiens, ne forment pas un espace vectoriel, mais au moins un cône, car les relations de définitions sont homogènes. Une fois fixé un point base, on peut choisir des lacets $\gamma_{i,j}$ dans $\mathbb{C}_*^n$ qui satisfont aux relations des tresses pures, et tels que
$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{ij}} \frac{\mathrm{d}z_i - \mathrm{d}z_j}{z_i - z_j} = 1.$$
On a une fibration $\mathbb{C}_*^n \to \mathbb{C}_*^{n-1}$ par omission de la dernière composante. Chacune des fibres est alors isomorphe à $\mathbb{C}$ privé de $n-1$ points, donc à $\mathbb{CP}^1$ privé de n points. Le point base choisi sur $\mathbb{C}_*^n$, projeté sur $\mathbb{C}_*^{n-1}$, correspond à une fibre particulière, et à tout système KZ est ainsi associé un système Fuchsien, plus précisément le système

$$(t_{1,n}, t_{2,n}, \ldots, t_{n-1,n}, -(t_{1n} + t_{2,n} + \ldots t_{n-1,n}))\,.$$

On peut enfin choisir les lacets $\gamma_{i,n}$, pour $1 \leq i < n$, de telle façon qu'ils soient entièrement contenus dans cette fibre particulière. C'est ce que nous ferons désormais.

Si maintenant on suppose que V est muni d'une action linéaire du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$, on peut déduire d'un système KZ une représentation de $B_n = \pi_1(\mathbb{C}_*^n/\mathfrak{S}_n)$ à la condition que $\omega(z)$ soit $\mathfrak{S}_n$-équivariante pour l'action diagonale de $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathbb{C}_*^n \times V$, ce qui se traduit par la condition
$$s t_{ij} s^{-1} = t_{s(i),s(j)} \quad s \in \mathfrak{S}_n$$
où l'on identifie une permutation de $\mathfrak{S}_n$ à son image dans $\mathrm{End}(V)$. On dira qu'un tel système KZ est *symétrique*.

2.3 Rigidité

Les systèmes Fuchsiens jouent un grand rôle dans l'étude du problème de Deligne-Simpson en général, et des systèmes rigides locaux en particulier. Dans ce type de problème, on étudie les n-uplets $\underline{A} = (A_1, \ldots, A_n) \in GL(V)^n$ tels que $A_1 A_2 \ldots A_n = 1$, que l'on appelle des systèmes locaux. Dans de nombreux cas (problème de Riemann-Hilbert), un tel système est la monodromie d'un système Fuchsien. Bolibruch et Kostov ont récemment démontré que tel était le cas pour des systèmes irréductibles, c'est-à-dire quand V n'admet pas de sous-espace stable propre pour l'action de $A_1, \ldots, A_n$.

Rappelons d'autre part qu'un système local irréductible est dit rigide s'il est déterminé à conjugaison simultanée près par les classes de conjugaison de chacun des A_i. Si $\dim V = 1$, il est clair que tout système local est rigide. Nicholas Katz [Ka96] a montré que tout système local s'obtenait de manière algorithmique à partir d'un système de dimension 1 par une suite d'opérations élémentaires, la plus importante étant un foncteur de convolution. L'application de ce foncteur de convolution sur des systèmes de dimension 1 fait apparaître la représentation de Burau du groupe de tresses. D'autre part, N. Katz a caractérisé les systèmes rigides à l'aide d'un invariant numérique d'origine géométrique qu'il appelle index de rigidité. Si l'on note $\mathrm{codim} Z(A)$ la codimension du centralisateur de A, indifféremment dans $GL(V)$ où $End(V)$ (cf. [Ka96] p. 16, preuve du th. 1.1.2), l'index de rigidité d'un n-uplet de matrices (non nécessairement irréductible) est défini par

$$rig(\underline{A}) = 2\dim(V)^2 - \sum_{i=1}^{n} \mathrm{codim} Z(A_i).$$

Katz montre que, si $\underline{A}$ est irréductible, alors $rig(\underline{A}) \leq 2$. Dans ce cas, $\underline{A}$ est rigide si et seulement si $rig(\underline{A}) = 2$.

Comme chacun de ces systèmes locaux (« multiplicatifs ») irréductibles provient d'un système Fuchsien (« additif »), il est naturel d'essayer de définir ces notions au niveau du système Fuchsien lui-même. Dettweiler et Reiter ont établi dans [DR00] une version « additive » de l'algorithme de Katz. On peut en effet définir de la même façon, pour un système Fuchsien, les notions d'irréductibilité, de rigidité, et l'index de rigidité par la même formule. Si $\underline{a}$ est irréductible, on a encore $rig(\underline{a}) \leq 2$, avec égalité si et seulement si $\underline{a}$ est rigide. Les relations entre un système Fuchsien $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ et sa monodromie $\underline{A} = (A_1, \ldots, A_n)$ sont condensés dans la proposition suivante, où l'on a noté, pour $h \in \mathbb{C}$, $\underline{A}^h$ la monodromie de $h\underline{a}$. Nous ne prenons pas ici en compte le point base, qui ne fait pas varier la classe d'isomorphisme des n-uplets correspondants.

Proposition 1. *On a les propriétés suivantes :*

(1) $\underline{A}$ irréductible $\Rightarrow$ $\underline{a}$ irréductible.

(2) Si $\underline{a}$ est irréductible, alors, pour h en dehors d'un ensemble localement fini, $\underline{A}^h$ est irréductible.

(3) Si les a_i sont semi-simples, pour h en dehors d'un ensemble localement fini, $rig(\underline{a}) = rig(\underline{A}^h)$.

Preuve — (1) découle de l'expression de $\underline{A}$ comme intégrale itérée de Chen, i.e. comme série convergente en les a_i. (2) est par exemple un cas particulier de [Ma02], prop. 1. D'après la théorie de Fuchs, chaque A_i est conjugué à $\exp(2\mathrm{i}\pi a_i)$. (3) découle alors de $Z(\exp(2\mathrm{i}\pi x)) = \exp(Z(x))$ pour x semi-simple. cqfd.

2.4 Algèbre de Hecke infinitésimale

Nous avons introduit dans [Ma01c, Ma01a] une version « infinitésimale » de l'algèbre de Hecke générique de type A. Nous considérons ici sa version « pure », c'est-à-dire la sous-algèbre de Lie $\mathcal{H}_n$ de $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ engendrée par les transpositions. Si l'on note $\mathcal{T}_n$ l'algèbre de Lie des tresses infinitinitésimales pures, on a un morphisme $\mathcal{T}_n \to \mathcal{H}_n$ définit par $t_{ij} \mapsto (i\ j)$.

A tout λ partition de n, on associe classiquement une représentation irréductible de l'algèbre de Hecke générique $H_n(q)$, que l'on considère comme représentation du groupe des tresses à n brins B_n. En particulier, à $[n-1,1]$ ou à son dual correspond la représentation de Burau, à $[n]$ ou $[1^n]$ correspondent les représentations 1-dimensionelles de B_n. On en déduit une action du groupe de tresses pures P_n, muni de ses générateurs habituels γ_{ij} pour $1 \leq i < j \leq n$, donc une représentation du groupe libre à n générateurs engendré par $\gamma_{1,n}, \ldots, \gamma_{n-1,n}$. En particulier, on obtient un n-uplet

$$T_\lambda = (\gamma_{1,n}, \ldots, \gamma_{n-1,n}, \gamma_{n-1,n}^{-1} \ldots \gamma_{1,n}^{-1})$$

dont on veut déterminer les propriétés. Un tel n-uplet provient par monodromie d'un système Fuchsien, dont les pôles simples correspondent à l'action des tresses infinitésimales $t_{i,n}$ sur la représentation du groupe symétrique associé à λ, où $t_{i,n}$ agit comme la transposition $(i\ n)$. Les propriétés éventuelles d'irréductibilité et de rigidité de T_λ sont reliées à celles des éléments semi-simples

$$t_\lambda = ((1\ n), \ldots, (n-1\ n), -h_n)$$

où h_n désigne le n^{e} élément de Jucys-Murphy

$$(1\ n) + (2\ n) + \ldots + (n-1\ n),$$

et où l'on a identifié les éléments de $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ à leur action sur la représentation associée à λ.

En particulier, si l'on note, pour tout n-uplet $(A_1, ..., A_n)$ de $M_N(\mathbb{C})$, $Z(A_i)$ le centralisateur de A_i dans $GL_N(\mathbb{C})$ (ou $M_N(\mathbb{C})$), et

$$rig((A_1, \ldots, A_n)) = 2N^2 - \sum_{i=1}^{n} \mathrm{codim}(Z(A_i))$$

l'index de rigidité du n-uplet considéré, on a

$$rig(T_\lambda) = rig(t_\lambda).$$

pour des valeurs génériques de $q \in \mathbb{C}$. On appellera ce nombre l'index de rigidité de λ, et on le notera $rig(\lambda)$. λ sera dit rigide si les n-uplets associés le sont, c'est-à-dire si $rig(\lambda) = 2$, et librement irréductible si les n-uplets associés sont irréductibles.

On montre alors

Proposition 2. *Soit $n \geq 3$, et $\lambda \vdash n$. Pour des valeurs génériques de q, λ est librement irréductible.*

Preuve — Il suffit de vérifier que la représentation du groupe symétrique associée est irréductible pour l'action des éléments de t_λ. Cela découle alors du fait que le groupe symétrique est engendré par les transpositions de la forme $(i\ n)$. cqfd.

La section suivante est consacrée à la démonstration du théorème

Théorème 1. *Soit $n \geq 3$, et $\lambda \vdash n$. λ est rigide pour des valeurs génériques de q si et seulement si*

$$\lambda \in \{[n], [n-1,1], [2,1^{n-2}], [1^n], [2,2]\}$$

On remarque tout d'abord que les représentations indiquées sont bien rigides. Pour les représentations de dimension 1, c'est évident. Pour la représentation standard $[n-1,1]$ (ou sa duale), qui correspond à la représentation de Burau (réduite) du groupe de tresses B_n, et pour $\lambda = [2,2]$, qui est le relevé de $[2,1]$ par un homomorphisme classique $B_4 \to B_3$, cela découle d'un calcul immédiat, par exemple à partir des formules de la section suivante.

3 Rigidité de l'algèbre de Hecke

3.1 Calcul de $rig(\lambda)$

On a toujours $rig(\lambda) \leq 2$. On veut donc montrer $rig(\lambda) < 2$. On calcule cet index sur t_λ plutôt que sur T_λ. La codimension du centralisateur d'une transposition ne dépend pas du choix de celle-ci, puisqu'elles sont toutes conjuguées. On a en fait, sur λ,

$$\mathrm{codim}(Z((i\ j))) = \dim(\lambda)^2 - A_+(\lambda)^2 - A_-(\lambda)^2 = 2A_+(\lambda)A_-(\lambda).$$

Pour λ partition de n, et μ partition de $n-1$, on note $\lambda \nearrow \mu$ si, pour tout i, $\lambda_i \leq \mu_i$. D'après les propriétés bien connues des éléments de Jucys-Murphy et la règle de Young, on a

$$\mathrm{codim}(Z(h_n)) = \dim(\lambda)^2 - \sum_{\mu \nearrow \lambda} \dim(\mu)^2.$$

Ainsi,

$$rig(\lambda) = \dim(\lambda)^2 \left[1 - \frac{(n-1)2A_+(\lambda)A_-(\lambda)}{\dim(\lambda)^2} + \sum_{\mu \nearrow \lambda} \left(\frac{\dim(\mu)}{\dim(\lambda)} \right)^2 \right].$$

Le calcul de cette fonction de λ n'est aisé que dans des cas très simples, par exemple pour la représentation de Burau, ou pour les diagrammes carrés de côté n. Dans ce dernier cas par exemple on obtient

$$rig([n^n]) = \dim(\lambda)^2 \left[2 - \frac{(n^2-1)}{2}\right].$$

Dans le cas général, il semble difficile de simplifier cette expression de l'index de rigidité $rig(\lambda)$ de λ, bien qu'il soit très facile de calculer $rig(\lambda)$ pour un diagramme donné. Nous nous contentons ici de déterminer les diagrammes qui sont rigides, c'est-à-dire ceux dont l'index de rigidité est 2. Pour ce faire, nous allons majorer $rig(\lambda)$.

Comme, pour tout $\mu \nearrow \lambda$, $\dim(\mu) \leq \dim(\lambda)$, si l'on pose

$$F(\lambda) = 1 + \delta(\lambda) - (n-1)\frac{2A_+(\lambda)A_-(\lambda)}{\dim(\lambda)^2},$$

on a $rig(\lambda)/\dim(\lambda)^2 \leq F(\lambda)$, il suffit de montrer que $F(\lambda) \leq 0$ pour en déduire que λ n'est pas rigide.

On rappelle la notation de Frobenius des diagrammes de Young. On peut coder un diagramme de Young par un triplet (a, b, r) où r est un entier naturel, $a = (a_1, \dots, a_r)$, $b = (b_1, \dots, b_r)$, sont des suites strictement décroissantes d'entiers naturels. λ est alors entièrement déterminé par le fait que

$$\left\{\begin{array}{lcll} \lambda_i & = & i + a_i & \text{pour } i \leq r \\ \lambda'_i & = & i + b_i & \text{pour } i \leq r \end{array}\right.$$

La valeur du caractère associé à λ sur une transposition, c'est-à-dire $A_+(\lambda) - A_-(\lambda)$, est alors donné, suivant une formule dûe à Frobenius (cf. [FH91] p. 52), par

$$\begin{array}{rcl} A_+(\lambda) - A_-(\lambda) & = & \frac{\dim(\lambda)}{n(n-1)} \sum_{i=1}^r (b_i(b_i+1) - (a_i(a_i+1)) \\ & = & \frac{\dim(\lambda)}{n(n-1)} \sum_{i=1}^r b_i^2 + b_i - a_i^2 - a_i \\ & = & \frac{\dim(\lambda)}{n(n-1)} \sum_{i=1}^r (b_i - a_i)(b_i + a_i + 1) \end{array}$$

Comme $A_+(\lambda) + A_-(\lambda) = \dim(\lambda)$, on en déduit, en posant $S = \sum_{i=1}^r (b_i - a_i)(b_i + a_i + 1)$,

$$A_\pm(\lambda) = \frac{\dim(\lambda)}{2}\left(1 \pm \frac{1}{n(n-1)}S\right)$$

d'où

$$2A_+(\lambda)A_-(\lambda) = \frac{\dim(\lambda)^2}{2}\left(1 - \frac{1}{n^2(n-1)^2}S^2\right)$$

On introduit enfin, pour tout $1 \leq i \leq r$,

$$m_i = |a_i - b_i| = |\lambda_i - \lambda'_i|,$$

et $m_\infty = \sup m_i$. On a alors

$$|S| \leq \sum_{i=1}^{r} |b_i - a_i|(b_i + a_i + 1) \leq m_\infty \sum_{i=1}^{r} (b_i + a_i + 1) = m_\infty n,$$

d'où, si l'on pose

$$G(\lambda) = 1 + \delta(\lambda) - \frac{n-1}{2} + \frac{m_\infty^2}{2(n-1)},$$

on a toujours $F(\lambda) \leq G(\lambda)$. On va maintenant majorer $G(\lambda)$.

Remarque. On peut également s'intéresser au $n(n-1)/2$-uplet formé de toutes les transpotions. Au niveau de l'action du groupe de tresses, il correspond au groupe engendré par les générateurs a_{ji} de Birman-Ko-Lee. C'est un $n(n-1)/2$-uplet convenable, puisqu'il est irréductible et que la somme de tous ses termes est un scalaire sur toutes les représentations irréductibles du groupe symétrique (c'est un élément central de $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$). Si l'on note, dans cette remarque, $R(\lambda)$ son index de rigidité, on obtient de la même façon que précédemment

$$\frac{R(\lambda)}{2\dim(\lambda)^2} = \left(1 - \frac{n(n-1)}{4} + \frac{S^2}{4n(n-1)}\right) \leqslant \frac{V(\lambda)}{4(n-1)}$$

avec $V(\lambda) = 4n - 4 - n(n-1)^2 + m_\infty^2 n$. Or, $\dim(\lambda) > 1 \Leftrightarrow m_\infty \leq n-2$, ce qui implique $V(\lambda) \leq -2n^2 + 7n - 4 < 0$ dès que $n \geq 3$. On en déduit que les seuls λ rigides en ce sens sont les représentations unidimensionelles de $\mathfrak{S}_n$.

3.2 Triangles effilés

On remarque que $G(\lambda)$ ne dépend que de $\delta(\lambda)$, $|\lambda| = n$, et m_∞. On va montrer que $G(\lambda) \leq G(\lambda_0)$, avec λ_0 un diagramme d'une forme déterminée de façon unique par $\delta(\lambda)$, n et λ_0. On montre d'abord les propriétés suivantes, valables pour tout diagramme de Young λ. On fixe λ, et on note $d = \delta(\lambda)$.

Lemme 1. *Pour tout $i \geq 1$, on a $\lambda_i \geq d - i + 1$ et $\lambda'_i \geq d - i + 1$. De plus,*

$$n \geq \frac{d(d+1)}{2} + m_\infty$$

Preuve — On fixe $i > 1$. Comme $\delta(\lambda) = \delta(\lambda')$, la deuxième inéquation découle de la deuxième. Or

$$d = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k \neq \lambda_{k+1}) \leq i - 1 + \sum_{k=i}^{\infty} (\lambda_k - \lambda_{k+1}) = i - 1 + \lambda_i.$$

Il nous reste à démontrer la dernière inéquation. Par définition, il existe $k \geq 1$ tel que $m_\infty = m_k$. Quitte à considérer λ' plutôt que λ, on peut supposer $\lambda_k \geq \lambda'_k$. Il est clair que

$$h(\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i > 0) \geq \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i > \lambda_{i+1}) = \delta(\lambda).$$

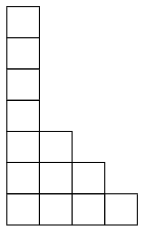
Ainsi, comme $(\lambda_k - (d-k+1)) - (\lambda'_k - (d-k+1)) \leq \lambda_k - (d-k+1)$,

$$n \geqslant \sum_{i=1}^{d} (\lambda_i - (d-i+1)) + \sum_{i=1}^{d} (d-i+1) \geqslant (\lambda_k - (d-k+1)) + \frac{d(d+1)}{2} \geqslant m_\infty + \frac{d(d+1)}{2}.$$

cqfd.

On considère alors des diagrammes de Young particuliers, que l'on appelle des « triangles effilés ». A tout couple (d, m) on associe le diagramme $\mu = M(d, m)$ défini par $\mu_1 = d + m$, $\mu_i = d - i + 1$ pour $2 \leq i \leq d$, $\mu_i = 0$ pour $i > d$. On a d'évidence

$$\begin{cases} \delta(M(d,m)) & = & d \\ m_\infty(M(d,m)) & = & m \end{cases}$$

$M(4,3) =$ 

On a alors

Proposition 3. *Pour tout diagramme de Young λ, si l'on note $d = \delta(\lambda)$, $m = m_\infty(\lambda)$, on a*

$$G(\lambda) \leq G(M(d,m)).$$

Preuve — $G(\lambda)$ est une fonction croissante en $\delta(\lambda)$, croissante en $m_\infty(\lambda)$, et décroissante en $|\lambda|$. Pour montrer la proposition, il suffit donc de montrer $|\lambda| \leq |M(d,m)|$. Mais $|M(d,m)| = m + d(d+1)/2$: la conclusion découle du lemme 1. cqfd.

On calcule maintenant $G(M(d,m))$, fonction de d et m que nous notons par commodité $g(d,m)$. On a

$$g(x,y) = \frac{R(x)y + P(x)/4}{Q(x,y)}$$

avec

$$\begin{cases} R(x) & = & 4 + x - x^2 \\ P(x) & = & 2x^3 + 11x^2 - 12 - x^4 \\ Q(x,y) & = & x^2 + x - 2 + 2y \end{cases}$$

On s'intéresse au signe de g pour x, y entiers, avec $x \geq 1$ et $y \geq 0$. On montre facilement que, sous ces conditions,

$$\begin{array}{ll} R(x) < 0 & \text{pour } x \geq 3 \\ P(x) < 0 & \text{pour } x \geq 5 \\ Q(x,y) > 0 & \text{pour } x \geq 3 \end{array}$$

D'autre part, $g(4,y) = (9-8y)/2(9+y) < 0$ pour $y \geq 2$, et $g(3,y) = (15-2y)/2(y+5) < 0$ pour $y \geq 8$. On en déduit

Proposition 4. *λ n'est pas rigide dès que $\delta(\lambda) \geq 5$, ou $\delta(\lambda) = 4$ et $m_\infty(\lambda) \geq 2$, ou $\delta(\lambda) = 3$ et $m_\infty \geq 8$.*

3.3 Cas particuliers

On est donc ramené à s'intéresser aux cas $\delta(\lambda) \leq 4$.

On règle d'abord les cas $m_\infty = 0$:

Lemme 2. *Si $m_\infty = 0$, λ est rigide dès que $|\lambda| \geq 3 + 2\delta(\lambda)$.*

Preuve — Dans ce cas, $\lambda = \lambda'$, et $A_+(\lambda) = A_-(\lambda) = \dim(\lambda)/2$, d'où $F(\lambda) = 1 + \delta(\lambda) - (n-1)/2$, et la conclusion (en utilisant $F(\lambda) \leq 0 \Rightarrow \lambda$ rigide). cqfd.

Ainsi, pour $\delta(\lambda) = 4$, $F(\lambda) \leq 0$ dès que $n \geq 11$. Pour $\delta(\lambda) = 3$, $F(\lambda) \leq 0$ dès que $n \geq 9$. Pour $\delta(\lambda) = 2$, $F(\lambda) \leq 0$ dès que $n \geq 7$.

On s'intéresse maintenant à $\delta(\lambda) = 4$. Il ne reste plus qu'à régler le cas $m_\infty = 1$. Dans ce cas,

$$G(\lambda) = 5 - \frac{n-1}{2} + \frac{1}{2(n-1)} \leq 0$$

ssi $n \geq 12$, c'est-à-dire que λ n'est pas rigide pour $\delta(\lambda) = 4$, ceci dès que $n \geq 12$.

De la même façon, si $\delta(\lambda) = 3$, pour chacune des valeurs de $m_\infty = m \in [1, 7]$, on peut résoudre l'équation $G(\lambda) \leq 0$, soit $8(n-1) - (n-1)^2 + m$. On en déduit que, pour $m \in [1, 7]$, λ ne peut être rigide pour $n \geq 10$.

Pour $\delta(\lambda) \in \{3, 4\}$, on a donc ramené le problème à l'étude d'un nombre fini de cas, pour $n \leq 11$.

On s'intéresse aux cas $\delta(\lambda) \in \{1, 2\}$, et tout d'abord $\delta(\lambda) = 1$, c'est-à-dire que λ est un rectangle dont les longueurs et largeurs valent a et b. On peut donc supposer $\lambda = [a^b]$. On a alors,

$$G(\lambda) = 2 - \frac{ab-1}{2} + \frac{(a-b)^2}{2(ab-1)},$$

et $G(\lambda) \leq 0$ si et seulement si $P(a, b) = a^2 + b^2 - a^2b^2 + 4ab - 5 < 0$. Pour $b \geq 5$, on associe à un tel $\lambda = [a^b]$ le diagramme μ défini par $\mu_i = a - i + 1$ si $i \leq b$, $\mu_i = a - b + 1$ pour $i > b$. On a alors $\delta(\mu) = b$, $m_\infty(\mu) = a - b = \mu_\infty(\lambda)$, et $|\mu| \leq |\lambda|$. On en déduit $G(\lambda) \leq G(\mu)$, d'où $G(\lambda) \leq 0$ dès que $b \geq 5$. Pour $b \in \{2, 3, 4\}$, on obtient qu'alors $G(\lambda) \leq 0$ dès que $a \geq 3$.

On considère maintenant des diagrammes λ tels que $\delta(\lambda) = 2$. On s'occupe d'abord du cas des équerres, $\lambda = [n-p, 1^p]$ avec $p \geq 1$. On peut de plus supposer $n - p > p$. On a $m_\infty(\lambda) = n - 2p - 1$. On en déduit, en posant $N = n - 1$,

$$G([n-p, 1^p]) = 3 - N/2 + (N-2p)^2/2N = \frac{(3-2p)N + 2p^2}{N} = \frac{3N - 2Np + 2p^2}{N}.$$

Au numérateur, on a cette fois un trinôme du second degré en p, qui a deux racines réelles dès que $N \geq 7$, $x_-(N)$ et $x_+(N)$. On a alors

$$x_\pm(N) = \frac{N \pm \sqrt{N}\sqrt{N-6}}{2}$$

On vérifie que, pour $N \geq 7$, $p \leq n/2 < x_+(N)$. D'autre part, $x_-(N) \leq 2$ dès que $N \geq 8$. On en déduit que, pour tout $N \geq 8$, une équerre λ qui n'est pas de la forme $[n-1,1]$ (ou son dual) vérifie $G(\lambda) \leq 0$:

Lemme 3. *Toute équerre λ de taille au moins 9 qui n'est pas de la forme $[n-1,1]$ (ou son dual) vérifie $G(\lambda) \leq 0$.*

On s'occupe maintenant du cas plus général des diagrammes vérifiant $\delta(\lambda) = 2$, que l'on va ramener en partie au cas des équerres. On choisit un tel λ, et on note r la longueur de sa diagonale. On remarque, par exemple à partir de la définition de m_∞ en termes des paramètres de Frobenius, que $n \geq m_\infty + r^2$. En particulier, si $r \geq 3$, on peut introduire une équerre $\mu = [n-2,1,1]$, qui vérifie $|\mu| = |\lambda|$, $\delta(\mu) = 2 = \delta(\lambda)$, et $m_\infty(\mu) = n-5 \geq m_\infty(\lambda)$ dès que $r \geq 3$. On en déduit $G(\lambda) \leq G(\mu) \leq 0$ d'apres le lemme 3. C'est encore le cas pour $r = 2$, dès que $m_\infty(\lambda) \leq n-5 = (n-r^2)-1$. Il reste donc à traiter séparément le cas $m_\infty = n-4$, pour $r = 2$. Or, si $m_\infty = m_k$, on écrit $a_k = \lambda_k - r$, $b_k = \lambda'_k - r$, et $m_k = a_k - b_k$. Alors $a_k + b_k \leq n - r^2$, et on doit avoir $b_k = 0$, d'où $a_k = n-4$, $\lambda_k = n-2$. Le seul cas à traiter séparément est donc $\lambda = [n-2,2]$, pour lequel on vérifie facilement que, bien que $G(\lambda) = 9/2(n-1) > 0$,

$$F(\lambda) = \frac{-n^2 + 12n - 8}{n} < 0$$

dès que $n \geq 12$.

On a donc démontré que, pour λ de forme non standard, si $|\lambda| \leq 12$, il existe μ tel que $G(\lambda) \leq G(\mu) \leq 0$. Il ne reste donc qu'un nombre fini (33) de cas non traités à tester (par exemple à l'aide d'un ordinateur), ce qui nous permet de conclure la démonstration du théorème.

4 KZ-systèmes $\mathfrak{S}_n$-irréductibles et rigides

Pour conclure ce travail, nous faisons une remarque supplémentaire. Les systèmes KZ qui donnent lieux à des représentations irréductibles de l'algèbre de Hecke de type A forment la classe la plus large de systèmes KZ dont la fibre est irréductible pour l'action du groupe symétrique [Ma01b]. A l'aide du théorème de classification de tels systèmes KZ, que nous avons démontré dans [Ma01a], nous allons démontrer que cette propriété de rigidité est encore caractéristique de la représentation de Burau parmi cette classe plus large de systèmes KZ.

Théorème 2. *Les seuls systèmes KZ symétriques qui sont rigides et irréductibles pour l'action du groupe symétrique sont, outre les systèmes de dimension 1, les systèmes de Burau.*

Pour démontrer ceci, il suffit de calculer la rigidité des représentations particulières et sporadiques, suivant la terminologie de [Ma01b]. Les représentations « particulières », pour $n = 4$, ne sont pas irréductibles pour l'action de P_n. Il reste donc à étudier les systèmes KZ dits « sporadiques » pour $n \geq 5$, que l'on note ici V_n. On trouve facilement, à partir de l'étude détaillée présentée dans [Ma01a], que

$$\begin{array}{lcl} \dim V_n & = & (n-1)(n-2)/2 \\ \mathrm{codim} Z(t_{12}) & = & n^3 - 7n^2 + 18n - 18 \\ \mathrm{codim} Z(h_n) & = & 0 \end{array}$$

d'où

$$rig(V_n) = \frac{n-1}{2}(-n^3 + 9n^2 - 28n + 32) < 0$$

car $n \geq 5$, et V_n n'est pas rigide, ce qui conclut cette deuxième caractérisation. Parmi les nombreux systèmes KZ construits jusqu'alors, nous ne connaissons aucun autre système KZ rigide, ce qui nous amène à conjecturer plus généralement

Conjecture. *Les seuls systèmes KZ symétriques rigides de dimension au moins 2 sont les systèmes de Burau.*

Remerciement. Je remercie Michael Dettweiler et Stefan Reiter qui m'ont initié à la théorie des systèmes locaux rigides.

Références

[Bu36] W. Burau, *Über Zopfgruppen ung gleichsinnig verdrillte Verkettungen*, Abh. math. Sem. Hamb. **11** 171-178 (1936).

[DR00] M. Dettweiler, S. Reiter, *An algorithm of Katz and its Application to the Inverse Galois Problem*, J. Symb. Comp. **30**, 761-798, (2000).

[Fo97] E. Formanek, *Braid group representations of low degree*, Proc. London Math. Soc. **34**, 673-693, (1997).

[FH91] J. Fulton, W. Harris, *Representation theory, a first course*, Graduate Texts in Mathematics 129, Springer-Verlag (1991).

[Ka96] N.M. Katz, *Rigid local systems*, Annals of Mathematics Studies 139, Princeton University Press, 1996.

[Lo94] D.D. Long, *Constructing representations of the braid groups*, Comm. Anal. Geom. **2**, 217-238 (1994).

[Ma01a] I. Marin, *Représentations linéaires des tresses infinitésimales*, Thèse, Univ. Paris XI-Orsay, 2001.

[Ma01b] I. Marin, *On KZ-systems which are irreductible under the action of the symmetric group*, C. R. Acad. Sciences t. 333 Sér. I (2001) p. 517-522.

[Ma01c] I. Marin, *Quotients infinitésimaux du groupe de tresses*, preprint DMA-01-31, Ecole Normale Supérieure, Paris (2001), soumis pour publication.

[Ma02] I. Marin, *Irréducibilité générique des produits tensoriels de monodromies*, preprint IWR-2002-15, Universität Heidelberg, 2002.

[Sq84] C. C. Squier, *The Burau Representation is Unitary*, Proc. Am. Math. Soc., vol. 90, issue 2, 199-202 (1984).