CARACTÈRES DE RIGIDITÉ DU GROUPE DE GROTHENDIECK-TEICHMÜLLER

par Ivan Marin

Résumé. — Soit $\Bbbk$ un corps (topologique) de caractéristique nulle. À l'aide d'un associateur de Drinfeld Φ on peut associer à toute représentation ρ d'une certaine $\Bbbk$-algèbre de Hopf $\mathfrak{B}_n(\Bbbk)$ une représentation $\widehat{\Phi}(\rho)$ du groupe de tresses sur le corps $\Bbbk((h))$ des séries de Laurent. Nous étudions la dépendance en Φ de $\widehat{\Phi}(\rho)$ pour certaines représentations, dites GT-rigides, et en déduisons des représentations projectives (continues) du groupe de Grothendieck-Teichmüller $GT_1(\Bbbk)$, donc pour $\Bbbk = \mathbb{Q}_l$ du groupe de Galois absolu de $\mathbb{Q}(\mu_{l^\infty})$. La plupart du temps, ces représentations projectives se décomposent en caractères linéaires, que nous déterminons pour les représentations de l'algèbre d'Iwahori-Hecke de type A. Dans ce cas, nous calculons de plus $\widehat{\Phi}(\rho)$ pour Φ un associateur pair, et en déduisons un modèle matriciel unitaire des représentations de l'algèbre d'Iwahori-Hecke. Pour l'action de $GT_1(\Bbbk)$, les représentations de cette algèbre qui correspondent aux diagrammes de Young « en équerre » jouissent de propriétés remarquables.

Ivan Marin, 69 rue Sébastien Gryphe, F-69007 Lyon
E-mail : marin@maths.univ-evry.fr
Url : http://www.maths.univ-evry.fr/pages_perso/marin/

Classification mathématique par sujets (2000). — 14G32, 20C99, 20C08, 20F36.

Mots clefs. — représentations, groupe de tresses, algèbres d'Iwahori-Hecke, groupe de Grothendieck-Teichmüller.

ABSTRACT. — Let $\Bbbk$ be a (topological) field of characteristic 0. Using a Drinfeld associator, a representation $\widehat{\Phi}(\rho)$ of the braid group over the field $\Bbbk((h))$ of Laurent series can be associated to any representation of a certain Hopf algebra $\mathfrak{B}_n(\Bbbk)$. We investigate the dependance in Φ of $\widehat{\Phi}(\rho)$ for a certain class of representations — so-called GT-rigid representations — and deduce from it (continuous) projective representations of the Grothendieck-Teichmüller group $GT_1(\Bbbk)$, hence for $\Bbbk = \mathbb{Q}_l$ representations of the absolute Galois group of $\mathbb{Q}(\mu_{l^\infty})$. In most situations, these projective representations can be decomposed into linear characters, which we do for the representations of the Iwahori-Hecke algebra of type A. In this case, we moreover express $\widehat{\Phi}(\rho)$ when Φ is even, and get unitary matrix models for the representations of the Iwahori-Hecke algebra. With respect to the action of $GT_1(\Bbbk)$, the representations of this algebra corresponding to hook diagrams have noticeable properties.

1. Introduction

V.G. Drinfeld a introduit dans [3], pour tout corps $\Bbbk$ de caractéristique 0 et tout $\lambda \in \Bbbk$ une famille $\mathbb{A}\mathrm{ss}_\lambda(\Bbbk)$ de séries formelles Φ en deux variables non commutatives qui permettent de construire des isomorphismes $\widetilde{\Phi}$ entre un complété $B_n(\Bbbk)$ du groupe de tresses B_n et la complétion d'une certaine $\Bbbk$-algèbre de Hopf graduée $\mathfrak{B}_n(\Bbbk)$. Ces séries sont appelées des associateurs (de Drinfeld). On en déduit dans [12] des foncteurs $\widehat{\Phi}$ de la catégorie des représentations (ici toujours supposées de dimension finie) de $\mathfrak{B}_n(\Bbbk)$ vers la catégorie des représentations de B_n sur le corps des séries de Laurent $K = \Bbbk((h))$. L'intérêt de ces foncteurs est, d'une part, que les représentations de $\mathfrak{B}_n(\Bbbk)$ sont plus aisées à étudier et à construire que celles de B_n, et d'autre part que ces foncteurs jouissent de bonnes propriétés en termes de théorie des représentations. Notamment, l'irréductibilité et l'absolue irréductibilité des représentations est préservée. De plus, certains associateurs (les associateurs « pairs », si $\Bbbk \subset \mathbb{R}$) permettent de construire des représentations unitaires de B_n — sans pour autant donner de modèle matriciel, l'explicitation de tels associateurs étant en général délicate.

La première motivation de ce travail est d'expliciter ce qui résulte d'un changement d'associateur. Si ρ est une des représentations irréductibles usuelles de $\mathfrak{B}_n(\Bbbk)$, les représentations $\widehat{\Phi}_1(\rho)$ et $\widehat{\Phi}_2(\rho)$ de B_n pour $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathbb{A}\mathrm{ss}_\lambda(\Bbbk)$ et $\lambda \neq 0$ sont conjuguées par des endomorphismes diagonalisables. Nous nous intéressons ici à ces endomorphismes, notamment dans le cas des représentations de l'algèbre d'Iwahori-Hecke de type A, quotient classique de l'algèbre de groupe de B_n.

La deuxième motivation concerne le groupe de Grothendieck-Teichmüller introduit par Drinfeld dans [3]. Ce groupe se décline en trois versions, le groupe profini $\widehat{GT}$, sa composante pro-l notée $GT^{(l)}$, et la version $\Bbbk$-pro-unipotente $GT(\Bbbk)$. Ils se décomposent comme produit semi-direct d'un tore et d'un sous-groupe $\widehat{GT}_1$, $GT_1^{(l)}$ ou $GT_1(\Bbbk)$. L'intérêt arithmétique de ces groupes est que le groupe de Galois absolu de $\mathbb{Q}$ se plonge naturellement dans $\widehat{GT}$. On a d'autre part des morphismes canoniques $\widehat{GT} \to GT^{(l)} \hookrightarrow GT(\mathbb{Q}_l)$, dont on déduit un morphisme du groupe de Galois absolu de $\mathbb{Q}(\mu_{l^\infty})$ vers $GT_1(\mathbb{Q}_l)$.

Ce groupe $\widehat{GT}$ (resp. $GT(\Bbbk)$) s'identifie à un groupe d'automorphismes d'une complétion pro-finie $\widehat{B_n}$ de B_n (resp. de la complétion $B_n(\Bbbk)$), de même que B_n s'identifie, par l'action d'Artin, à un groupe d'automorphismes d'un groupe libre F. Dans ce dernier cas, on obtient classiquement des représentations projectives de B_n à partir de certaines représentations de F, les « systèmes locaux rigides », c'est-à-dire les représentations irréductibles de F dont la classe d'isomorphisme est inchangée après torsion par l'action de B_n. De façon analogue, nous associons ici des représentations projectives Q_R de $GT_1(\Bbbk)$ à certaines représentations $R = \widehat{\Phi}(\rho)$, qui présentent de plus la particularité que Q_R se décompose en caractères linéaires à valeurs dans $K^\times$. Parmi ces représentations, dites GT-rigites et agrégeantes, se trouvent notamment les représentations irréductibles de l'algèbre d'Iwahori-Hecke de type A. Si $\Bbbk = \mathbb{Q}_l$, les caractères obtenus induisent enfin des caractères linéaires du groupe de Galois absolu de $\mathbb{Q}(\mu_{l^\infty})$ à valeurs dans $\mathbb{Q}_l((h))^\times$.

On note P_n le groupe de tresses pures. Les résultats principaux de l'articles sont les suivants.

Théorème A. — *Soit ρ une représentation absolument irréductible, GT-rigide et agrégeante de $\mathfrak{B}_n(\Bbbk)$, $R = \widehat{\Phi}(\rho)$ pour un certain $\Phi \in \mathbb{A}\mathrm{ss}_\lambda(\Bbbk)$, $\lambda \neq 0$. Q_R est une représentation projective continue de $GT_1(\Bbbk)$, non triviale si et seulement si $R([P_n, P_n]) = \{1\}$. Si $\Bbbk = \mathbb{Q}_l$, Q_R induit une représentation continue du groupe de Galois absolu de $\mathbb{Q}(\mu_{l^\infty})$, non triviale ssi $R([P_n, P_n]) = \{1\}$.*

D'après [12], un moyen d'obtenir des représentations unitaires de B_n consiste à calculer $\widehat{\Phi}(\rho)$ pour ρ une représentation de $\mathfrak{B}_n(\Bbbk)$ satisfaisant certaines conditions de symétrie et $\Phi \in \mathbb{A}\mathrm{ss}_\lambda(\Bbbk)$ un associateur pair avec $\Bbbk \subset \mathbb{R}$ et $\lambda \neq 0$. En particulier, l'unitarité des représentations de l'algèbre d'Iwahori-Hecke est expliquée par cette construction à partir de représentations particulières de $\mathfrak{B}_n(\Bbbk)$, les représentations infinitésimales de l'algèbre d'Iwahori-Hecke. En revanche, aucun associateur pair n'étant à l'heure actuelle explicitement connu, il est en général difficile de calculer $\widehat{\Phi}(\rho)$.

Théorème B. — *Si ρ est une représentation infinitésimale de l'algèbre d'Iwahori-Hecke, et $\Phi \in \mathbb{A}\mathrm{ss}_\lambda(\Bbbk)$ pour $\lambda \neq 0$ est pair, un modèle matriciel de $\widehat{\Phi}(\rho)$ est donné par la proposition 4.1. En particulier, si $\Bbbk \subset \mathbb{R}$, ces représentations sont unitaires au sens de* [12].

L'étude de Q_R pour R la représentation de Burau réduite (avec n variable) fait apparaître une famille de caractères χ_d, $d \geq 2$, de $GT_1(\Bbbk)$ vers $(\Bbbk[[h]])^\times$.

Théorème C. — *Les caractères χ_d, $d \geq 2$, sont algébriquement indépendants. Si R est une représentation irréductible de l'algèbre d'Iwahori-Hecke de type A, les caractères intervenant dans la décomposition de Q_R sont des monômes (explicitement déterminés) en les χ_d.*

Une représentation irréductible R de l'algèbre d'Iwahori-Hecke associée à un diagramme de Young α étant donnée, une situation remarquable se produit lorsque les caractères qui interviennent dans la décomposition de Q_R sont deux à deux distincts. On dit alors que Q_R est sans résonnances.

Théorème D. — *La représentation Q_R est sans résonnances si et seulement si α est en équerre ou correspond à la partition [2,2].*

Cet article comporte trois parties, qui exposent successivement les préliminaires nécessaires, les propriétés générales des actions de $GT_1(\Bbbk)$ obtenues, et enfin l'étude particulière aux représentations de l'algèbre d'Iwahori-Hecke. Le théorème A est démontré en sections 3.4 et 3.5 (corollaire de la proposition 3.2 et proposition 3.3). Le théorème B est démontré en section 4.4 (proposition 4.1), le théorème C en section 4.5 et le théorème D en section 4.6 (proposition 4.3). Certains calculs utiles sont repoussés en appendice.

2. Préliminaires

2.1. Tresses et tresses infinitésimales. — On note B_n pour $n \geq 1$ le groupe de tresses à n brins, en convenant $B_1 = \{e\}$. On note P_n le groupe de tresses pures, noyau de la surjection canonique $\pi : B_n \to \mathfrak{S}_n$, $\mathfrak{S}_n$ désignant le groupe symétrique sur n lettres. Pour $r < n$, on identifiera B_r au sous-groupe de B_n formé des tresses qui laissent les $n - r$ derniers brins droits. Soit $\mathbb{k}$ un $\mathbb{Q}$-anneau, et $\mathcal{T}_n(\mathbb{k})$ la $\mathbb{k}$-algèbre de Lie d'holonomie définie par générateurs $t_{ij}, 1 \leq i, j \leq n$ et relations $t_{ii} = 0$, $t_{ij} = t_{ji}$, $[t_{ij}, t_{kl}] = 0$ si $\#\{i, j, k, l\} = 4$ et $[t_{ij}, t_{ik} + t_{kj}] = 0$ pour tous i, j, k. Soit alors $\mathfrak{B}_n(\mathbb{k})$ la version infinitésimale du groupe de tresses, c'est-à-dire le produit semi-direct de l'algèbre de groupe $\mathbb{k}\mathfrak{S}_n$ du groupe symétrique par l'algèbre enveloppante universelle de $\mathcal{T}_n(\mathbb{k})$, l'action donnant le produit semi-direct étant $s.t_{ij} = t_{s(i)s(j)}$. Ces algèbres sont naturellement graduées, par $deg(t_{ij}) = 1$ et $deg(s) = 0$ si $s \in \mathfrak{S}_n$. On note $\widehat{\mathcal{T}_n}(\mathbb{k})$ et $\widehat{\mathfrak{B}_n}(\mathbb{k})$ leur complété par rapport à cette graduation.

On notera $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ les générateurs d'Artin classiques de B_n, $\xi_{ij} = \sigma_{j-1} \ldots \sigma_{i+1} \sigma_i^2 \sigma_{i+1}^{-1} \ldots \sigma_{j-1}^{-1}$ les générateurs traditionnels de P_n, et $\delta_r = \sigma_{r-1} \ldots \sigma_2 \sigma_1^2 \sigma_2 \ldots \sigma_{r-1}$. Rappelons que ces éléments $\delta_2, \ldots, \delta_r$ engendrent un sous-groupe abélien libre à l'intérieur de P_n, et que de plus $\delta_r = \gamma_r \gamma_{r-1}^{-1}$ où $\gamma_r = (\sigma_1 \ldots \sigma_{r-1})^r \in B_r$ engendre le centre de B_r pour $r \geq 3$. Les analogues infinitésimaux de δ_r et γ_r sont notés $Y_r = t_{1r} + \cdots + t_{r-1,r}$ et $Z_r = \sum_{1 \leq i,j \leq r} t_{ij}$. On a $Y_r = Z_r - Z_{r-1}$.

Soit $C^r P_n$ pour $r \geq 0$ la suite centrale descendante de P_n, définie par $C^0 P_n = P_n$, $C^1 P_n = [P_n, P_n]$ (groupe des commutateurs) et $C^{r+1} P_n = [P_n, C^r P_n]$. On note $P_n(\mathbb{k})$ ce que Drinfeld appelle la complétion $\mathbb{k}$-prounipotente de P_n, c'est-à-dire la limite projective des $(P_n/[P_n, C^r P_n]) \otimes \mathbb{k}$. Comme la suite centrale descendante de P_n est séparante, c'est-à-dire que les sous-groupes $C^r P_n$ ont une intersection triviale, le morphisme naturel de P_n dans ces complétions est injectif. L'action par conjugaison de B_n sur son sous-groupe P_n s'étend naturellement en une action de B_n sur $P_n(\mathbb{k})$. On note $B_n(\mathbb{k})$ le quotient de $B_n \ltimes P_n(\mathbb{k})$ par le sous-groupe (distingué) engendré par les éléments $\sigma.\sigma^{-1}$ pour $\sigma \in P_n = B_n \cap P_n(\mathbb{k})$.

2.2. Groupe libre et groupe de Hausdorff. — Soit $\mathbb{k}$ un corps de caractéristique 0, $\mathcal{A}(\mathbb{k}) = \mathbb{k} \ll x, y \gg$ la $\mathbb{k}$-algèbre des séries formelles à coefficients dans $\mathbb{k}$ en des indéterminées non commutatives x et y. Si $\mathbb{k}$ est un corps topologique, on munit $\mathcal{A}(\mathbb{k})$ de la topologie de la convergence simple de ses coefficients, ce qui en fait une $\Bbbk$-algèbre topologique complète. On note $\mathcal{L}(\Bbbk)$ l'ensemble des séries de Lie formelles en x et y à coefficients dans $\Bbbk$, naturellement identifiée à la sous-algèbre de Lie de $\mathcal{A}(\Bbbk)$ formée des séries de Lie en x et y, et $\mathcal{A}_+(\Bbbk) \subset \mathcal{A}(\Bbbk)$ l'ensemble des éléments de terme constant nul. Inversement, $\mathcal{A}(\Bbbk)$ s'identifie à la complétion de l'algèbre enveloppante universelle de l'algèbre de Lie libre sur x, y pour la graduation $\deg(x) = \deg(y) = 1$. L'ordre $\omega(f)$ de $f \in \mathcal{A}(\Bbbk)$ est par définition le degré de son monôme de plus bas degré. On note encore $\mathcal{M}(\Bbbk)$ ce que Bourbaki appelle le groupe de Magnus, c'est-à-dire le groupe des éléments de $\mathcal{A}(\Bbbk)$ de terme constant égal à 1, et $\mathcal{H}(\Bbbk) = \exp \mathcal{L}(\Bbbk) \subset \mathcal{M}(\Bbbk)$, c'est-à-dire le groupe de Hausdorff, ensemble des éléments de $\mathcal{A}(\Bbbk)$ qui sont grouplike pour sa structure naturelle d'algèbre de Hopf complétée. Si $\Bbbk$ est un corps topologique, toutes ces parties de $\mathcal{A}(\Bbbk)$ sont munies de la topologie induite.

Il est classique (cf. [1] ch. II §5) que l'exponentielle et le logarithme fournissent des isomorphismes entre $\mathcal{A}_+(\Bbbk)$ et $\mathcal{M}(\Bbbk)$ d'une part, $\mathcal{L}(\Bbbk)$ et $\mathcal{H}(\Bbbk)$ d'autre part. On vérifie facilement que, pour $f \in \mathcal{A}_+(\Bbbk)$, les coefficients de $\exp(f)$ sont des polynômes en les coefficients de f, et qu'ainsi l'application $\exp : \mathcal{A}_+(\Bbbk) \to \mathcal{M}(\Bbbk)$ est continue si $\Bbbk$ est un corps topologique. Il en est de même pour l'application logarithme, ce qui montre que $\mathcal{A}_+(\Bbbk)$ et $\mathcal{M}(\Bbbk)$ d'autre part, $\mathcal{L}(\Bbbk)$ et $\mathcal{H}(\Bbbk)$ d'autre part, sont homéomorphes par ces applications.

Si $f(x, y) \in \mathcal{M}(\Bbbk)$ et $u, v \in \mathcal{L}(\Bbbk) \subset \mathcal{A}_+(\Bbbk)$, on définit classiquement la substitution $f(u, v)$. Si $f(x, y) \in \mathcal{M}(\Bbbk)$ et $u, v \in \mathcal{H}(\Bbbk) = \exp \mathcal{L}(\Bbbk)$, on définit, suivant l'usage de Drinfeld dans [3], $f(u, v)$ comme $f(\log(u), \log(v))$. Cette écriture s'étend naturellement et permet de définir $f(u, v)$ pour u, v dans la complétion $\Bbbk$-pro-unipotente de n'importe quel groupe. En particulier, pour $u, v \in P_n(\Bbbk)$, $f(u, v) \in P_n(\Bbbk)$.

Soit F le groupe libre en deux générateurs x, y. Il est classique (cf. [1] ch. II §5 no. 3, th. 1) que l'application $x \mapsto e^x$, $y \mapsto e^y$ se prolonge en un morphisme de groupes qui plonge F dans $\mathcal{H}(\Bbbk)$, et que ce plongement se factorise par la complétion pro-nilpotente $\widehat{F}$ de F : on a $F \hookrightarrow \widehat{F} \hookrightarrow \mathcal{H}(\Bbbk)$, le deuxième morphisme étant continu si $\Bbbk$ est un corps topologique. De même, l'application $x \mapsto 1 + x$, $y \mapsto 1 + y$ plonge F et $\widehat{F}$ dans $\mathcal{M}(\Bbbk)$ de façon continue. Si l'on étend les notations $\mathcal{M}(\Bbbk)$ et $\mathcal{A}(\Bbbk)$ de façon naturelle au cas où $\Bbbk$ est un anneau unitaire, cette dernière application plonge en fait F et $\widehat{F}$ dans $\mathcal{M}(\mathbb{Z})$.

2.3. Associateurs de Drinfeld. — Pour tout $\mathbb{Q}$-anneau $\mathbb{k}$ et tout $\lambda \in \mathbb{k}$, on définit suivant [3] l'ensemble $\mathbb{A}\mathrm{ss}_\lambda(\mathbb{k})$ des $\Phi \in \mathcal{A}(\mathbb{k})$ qui satisfont les équations suivantes :

$$\Delta(\Phi) = \Phi \hat{\otimes} \Phi \tag{1}$$

$$\Phi(y,x) = \Phi(x,y)^{-1} \tag{2}$$

$$e^{\lambda x/2}\Phi(z,x)e^{\lambda z/2}\Phi(y,z)e^{\lambda y/2}\Phi(x,y) = 1 \tag{3}$$

$$(d_3\Phi)(d_1\Phi) = (d_0\Phi)(d_2\Phi)(d_4\Phi) \tag{4}$$

avec $z = -x-y$. Les équation (3) et (4) sont appelées équation de l'hexagone et du pentagone, respectivement. Dans la relation (1), le symbole $\hat{\otimes}$ désigne le produit tensoriel complété et Δ le coproduit associé à l'identification de $\mathcal{A}(\mathbb{k})$ avec la bigèbre enveloppante de $\mathcal{L}(\mathbb{k})$. Finalement, pour que l'équation (4) ait un sens, il nous faut définir

$$\begin{cases} d_3\Phi = \Phi(t_{12}, t_{23} + t_{24}) \\ d_1\Phi = \Phi(t_{13} + t_{23}, t_{34}) \\ d_0\Phi = \Phi(t_{23}, t_{34}) \\ d_2\Phi = \Phi(t_{12} + t_{13}, t_{24} + t_{34}) \\ d_4\Phi = \Phi(t_{12}, t_{23}) \end{cases}$$

de sorte que (4) est une équation dans $\widehat{\mathsf{U}\mathcal{T}}_4(\mathbb{k})$. Remarquons finalement que l'équation (1) est équivalente à dire que $\Phi \in \mathcal{H}(\mathbb{k})$. On montre facilement que, pour tout $\mathbb{Q}$-anneau $\mathbb{k}$ et tout $\lambda \in \mathbb{k}$, $\mathbb{A}\mathrm{ss}_\lambda(\mathbb{k}) = \mathbb{A}\mathrm{ss}_{-\lambda}(\mathbb{k})$. En particulier, à tout $\Phi \in \mathbb{A}\mathrm{ss}_\lambda(\mathbb{k})$ on peut associer un autre associateur $\overline{\Phi}(x,y) = \Phi(-x,-y) \in \mathbb{A}\mathrm{ss}_\lambda(\mathbb{k})$. Si l'on suppose qu'existe un $\Phi \in \mathbb{A}\mathrm{ss}_\lambda(\mathbb{k})$, il est facile de déterminer la forme de ses premiers termes. En particulier, il existe toujours $\mathfrak{c} \in \mathbb{k}$ tel que $\Phi(x,y)$ vaille $1 + \frac{\lambda^2}{24}[x,y] + \mathfrak{c}\left([x,[x,y]] - [y,[y,x]]\right)$ plus des termes d'ordre supérieur (cf. par exemple [12] prop. 1). Étant donnée l'importance pour nous de ce coefficient, nous le considérons comme une fonction $\mathfrak{c}(\Phi)$ de l'associateur.

Dans [3], Drinfeld construit explicitement un associateur $\Phi_{KZ} \in \mathbb{A}\mathrm{ss}_1(\mathbb{C})$ à partir de l'étude du système différentiel de Knizhnik et Zamolodchikov. Une formule explicite pour les coefficients de Φ_{KZ} est due à Le et Murakami. En particulier, $\mathfrak{c}(\Phi_{KZ}) = -\zeta(3)/(2\mathrm{i}\pi)^3 \neq 0$, donc $\Phi_{KZ} \neq \overline{\Phi}_{KZ}$ puisque $\mathfrak{c}(\overline{\Phi}) = -\mathfrak{c}(\Phi)$. Il introduit d'autre part l'ensemble des associateurs pairs $\mathbb{A}\mathrm{ss}^0_\lambda(\mathbb{k})$, définis comme l'ensemble des $\Phi \in \mathbb{A}\mathrm{ss}_\lambda(\mathbb{k})$ tels que $\overline{\Phi} = \Phi$, et montre $\mathbb{A}\mathrm{ss}^0_1(\mathbb{Q}) \neq 0$ (cf. [3] prop. 5.3).

Ces associateurs permettent de définir des isomorphismes entre $B_n(\mathbb{k})$ et $\widehat{\mathfrak{B}_n}(\mathbb{k})$. Plus précisément, à tout $\Phi \in \mathbb{A}\mathrm{ss}_\lambda(\mathbb{k})$ on associe un isomorphisme $\widetilde{\Phi} : B_n(\mathbb{k}) \to \widehat{\mathfrak{B}_n}(\mathbb{k})$ tel que

$$\widetilde{\Phi}(\sigma_i) = \Phi(t_{i,i+1}, Y_i) s_i \exp(\lambda t_{i,i+1}/2) \Phi(Y_i, t_{i,i+1})$$

On vérifie aisément (cf. [12] p. 9 prop. 2) que $\widetilde{\Phi}(\delta_r) = \exp(\lambda Y_r)$ pour tout $\Phi \in \mathbb{A}\mathrm{ss}_\lambda(\mathbb{k})$ et $r \in [2, n]$.

2.4. Le groupe de Grothendieck-Teichmüller $\mathbb{k}$-pro-unipotent. — Le groupe $GT(\mathbb{k})$ est l'ensemble des couples $(\lambda, f) \in \mathbb{k}^\times \times \mathcal{H}(\mathbb{k})$ qui vérifient $f(u,v) = f(v,u)^{-1}$ pour tous $u, v \in \mathcal{H}(\mathbb{k})$, $f(w,u)w^m f(v,w)v^m f(u,v)u^m = 1$ pour tous $u, v, w \in \mathcal{H}(\mathbb{k})$ tels que $uvw = 1$ et $m = (\lambda - 1)/2$ (équation de l'hexagone), et enfin une équation dans $P_4(\mathbb{k})$:

$$f(\xi_{12}, \xi_{23}\xi_{24}) f(\xi_{13}\xi_{23}, \xi_{34}) = f(\xi_{23}, \xi_{34}) f(\xi_{12}\xi_{13}, \xi_{24}\xi_{34}) f(\xi_{12}, \xi_{23}).$$

Si $\mathbb{k}$ est un corps topologique, on munit $GT(\mathbb{k})$ de la topologie naturelle de $\mathbb{k}^\times \times \mathcal{H}(\mathbb{k})$. C'est un groupe (topologique) muni de la loi $(\lambda_1, f_1).(\lambda_2, f_2) = (\lambda, f)$ avec $\lambda = \lambda_1\lambda_2$ et

$$f(u,v) = f_1(f_2(u,v)u^{\lambda_2} f_2(u,v)^{-1}, v^{\lambda_2}) f_2(u,v)$$

En particulier, on a un morphisme de groupes (topologiques) $GT(\mathbb{k}) \to \mathbb{k}^\times$, dont le noyau est noté $GT_1(\mathbb{k})$. Ces groupes admettent des analogues infinitésimaux, définis comme suit. Soit $GRT_1(\mathbb{k}) = \mathbb{A}\mathrm{ss}_0(\mathbb{k})$, muni de la loi $f_1.f_2 = f$ avec $f(x,y) = f_1(f_2(x,y)xf_2(x,y)^{-1}, y)f_2(x,y)$. C'est une loi de groupe (topologique) et on a une action de $\mathbb{k}^\times$ sur $GRT_1(\mathbb{k})$, définie par $c.f(x,y) = f(c^{-1}x, c^{-1}y)$. L'analogue infinitésimal de $GT(\mathbb{k})$ est alors défini comme $GRT(\mathbb{k}) = \mathbb{k}^\times \ltimes GRT_1(\mathbb{k})$. Plus généralement, la même formule donne une action à droite de $GRT_1(\mathbb{k})$ sur $\mathbb{A}\mathrm{ss}_\lambda(\mathbb{k})$, pour tout $\lambda \in \mathbb{k}$: si $\Phi \in \mathbb{A}\mathrm{ss}_\lambda(\mathbb{k})$ et $f \in \mathbb{A}\mathrm{ss}_0(\mathbb{k}) = GRT_1(\mathbb{k})$, on a $\Phi.f \in \mathbb{A}\mathrm{ss}_\lambda(\mathbb{k})$. De plus, cette action est libre et transitive d'après [3] prop. 5.5.

Le lien entre les groupes $GRT_1(\mathbb{k})$ et $GT_1(\mathbb{k})$ est donné par leur action commune sur les associateurs. On a en effet une action à gauche $(f, \Phi) \mapsto f.\Phi$ de $GT_1(\mathbb{k})$ sur $\mathbb{A}\mathrm{ss}_\lambda(\mathbb{k})$, où

$$(f.\Phi)(x,y) = f(\Phi(x,y)\exp(x)\Phi(x,y)^{-1}, \exp(y))\Phi(x,y).$$

Comme cette action est également libre et transitive d'après [3] prop. 5.1 et que les deux actions commutent, à tout $\Phi \in \mathbb{A}\mathrm{ss}_\lambda(\mathbb{k})$ est associé un isomorphisme $\iota_\Phi : GRT_1(\Bbbk) \to GT_1(\Bbbk)$ défini par $\Phi.f = \iota_\Phi(f).\Phi$ pour tout $f \in GRT_1(\Bbbk)$.

Le groupe $GT_1(\Bbbk)$ agit à droite sur $B_n(\Bbbk)$ par les formules $\sigma_1 \mapsto \sigma_1$, $\sigma_r \mapsto f(\delta_r, \sigma_r^2)^{-1}\sigma_r f(\delta_r, \sigma_r^2)$ pour $f \in GT_1(\Bbbk)$. De plus, pour tous $\Phi \in \mathbb{A}\mathrm{ss}_1(\Bbbk)$, $\sigma \in B_n$ et $f \in GT_1(\Bbbk)$, on a $\widetilde{\Phi}(\sigma.f) = \widetilde{(f.\Phi)}(\sigma)$. Effet, il suffit de vérifier cette égalité sur les générateurs d'Artin parce que $GT_1(\Bbbk)$ agit sur $B_n(\Bbbk)$ par automorphismes de groupe ; or $\widetilde{(f.\Phi)}(\sigma_r) = Q\widetilde{\Phi}(\sigma_r)Q^{-1}$ avec Q égal à

$$f\left(\Phi(t_{r,r+1}, Y_r)\exp(t_{r,r+1})\Phi(Y_r, t_{r,r+1}), \exp\, Y_r\right) = f\left(\widetilde{\Phi}(\sigma_r^2), \widetilde{\Phi}(\delta_r)\right).$$

On en déduit l'égalité voulue.

2.5. Un résultat de densité. — Le but de ce paragraphe est de démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME 2.1. — *Si L est un corps topologique et $L' \subset L$ est un sous-corps topologique dense de L, alors $GT_1(L')$ est dense dans $GT_1(L)$.*

Pour démontrer le théorème, on choisit $\Phi \in \mathbb{A}\mathrm{ss}_1(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{A}\mathrm{ss}_1(L') \subset \mathbb{A}\mathrm{ss}_1(L)$ et on utilise l'isomorphisme ι_Φ entre $GRT_1(L)$ et $GT_1(L)$. Il envoie $GRT_1(L')$ sur $GT_1(L')$. Ces isomorphismes respectent la topologie, comme le montre le lemme suivant.

LEMME 1. — *Soit $\Bbbk$ un corps topologique. La bijection ι_Φ associée à $\Phi \in \mathbb{A}\mathrm{ss}_1(\Bbbk)$ entre $GRT_1(\Bbbk)$ et $GT_1(\Bbbk)$ est un homéomorphisme.*

Démonstration. — Soit $g \in GRT_1(\Bbbk)$ et $f = \iota_\Phi(g) \in GT_1(\Bbbk)$. Par définition, la relation entre f et g est donnée par les formules

$$\Phi'(x,y) = \Phi(g(x,y)xg(x,y)^{-1}, y)g(x,y) \tag{5}$$

$$\Phi'(x,y) = f(\Phi(x,y)\exp(x)\Phi(x,y)^{-1}, \exp(y))\Phi(x,y) \tag{6}$$

Il est clair que la relation (5) associe continument, à tout élément $g \in \mathcal{M}(\Bbbk)$, un élément $\Phi' \in \mathcal{M}(\Bbbk)$. Posant $f = \exp \circ F$ avec $F \in \mathcal{L}(\Bbbk)$, la relation (6) dit qu'alors

$$F\left(\log\left(\Phi(x,y)\exp(x)\Phi(x,y)^{-1}\right), y\right) = \log\left(\Phi'(x,y)\Phi(x,y)^{-1}\right).$$

Or il existe $P \in \mathcal{A}(\Bbbk)$, $\omega(P) \geq 2$, tel que $\log\left(\Phi(x,y)\exp(x)\Phi(x,y)^{-1}\right)$ vaille $x+P$. Comme l'application $\Phi' \mapsto \log\left(\Phi'\Phi^{-1}\right)$ est continue, il suffit de montrer que l'endomorphisme continu Δ du $\Bbbk$-espace vectoriel topologique $\mathcal{A}_+(\Bbbk)$ défini par $F(x,y) \mapsto F(x+P, y)$ admet une réciproque continue. Or, pour tout $F \in \mathcal{A}_+(\Bbbk)$, $(\Delta - \mathrm{Id})(F)$ est d'ordre strictement supérieur à $\omega(F)$, ainsi l'ordre de $(\Delta - \mathrm{Id})^n(F)$ est au moins $\omega(F) + n$ et $\Delta^{-1} = \sum(\Delta - \mathrm{Id})^n(-1)^n$ est continu pour la topologie de la convergence simple puisque chaque $(\Delta - \mathrm{Id})^n$ l'est. La continuité du morphisme inverse $GT_1(\mathbb{k}) \to GRT_1(\mathbb{k})$ se montre de même. □

Il suffit donc de montrer que $GRT_1(L')$ est dense dans $GRT_1(L)$. Or, pour tout corps $\mathbb{k}$, $GRT_1(\mathbb{k})$ est naturellement défini comme l'ensemble des $\mathbb{k}$-points d'un $\mathbb{Q}$-schéma en groupe pro-unipotent GRT_1 dont l'algèbre de Lie $\mathfrak{grt}_1$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathcal{L}$ définie par des équations linéaires (cf. [3] p. 851 et prop. 5.7) à coefficients rationnels. On en déduit $\mathfrak{grt}_1(L) = \mathfrak{grt}_1(L') \otimes_{L'} L$, et $\mathfrak{grt}_1(L')$ est dense dans $\mathfrak{grt}_1(L)$. Pour avoir la conclusion du théorème, il suffit de montrer que l'application exponentielle de cette algèbre de Lie dans son groupe de Lie est continue. Pour tout $f \in \mathcal{A}_+(\mathbb{k})$, notons D_f l'unique dérivation continue de $\mathcal{A}(\mathbb{k})$ qui vérifie $D_f(x) = [f, x]$ et $D_f(y) = 0$, et s_f l'endomorphisme linéaire de $\mathcal{A}(\mathbb{k})$ qui à $g \in \mathcal{A}(\mathbb{k})$ associe $s_f(g) = gf + D_f(g)$. On a $\omega(s_f(g)) > \omega(g)$. Comme GRT_1 est pro-unipotent en tant que schéma en groupe sur $\mathbb{Q}$, l'application exponentielle associée est surjective. L'image de $f \in \mathfrak{grt}_1(\mathbb{k})$ dans $GRT_1(\mathbb{k})$ est donnée par $\exp(s_f)(1)$ (cf. [3], ou [13] prop. 2.9 pour plus de détails), on en déduit que cette application est continue. Le théorème est ainsi démontré.

2.6. Caractères de Soulé. — Pour l un nombre premier, notons μ_{l^∞} la limite inductive sur n des μ_{l^n} et Γ le groupe de Galois absolu de $\mathbb{Q}(\mu_{l^\infty})$, muni de sa topologie naturelle de groupe profini.

Soulé a défini une classe de caractères de Γ à valeurs dans le groupe additif $\mathbb{Z}_l$, dont nous rappelons brièvement la construction. Soit $m \geq 3$ impair. Pour tout $n \geq 1$ (resp. $n \geq 2$ si $l = 2$) on note ζ_n une racine primitive l^n-ième de 1, et

$$\epsilon_{m,n} = \prod_a (\zeta_n^a - 1)^{[a^{m-1}]}$$

où a parcourt les entiers strictement compris entre 0 et l^n qui sont premiers à l et $[a^{m-1}]$ désigne le reste de la division euclidienne de a^{m-1} par l^n. Comme $m - 1$ est pair, $\epsilon_{m,n}$ est totalement réel et totalement positif. Pour $u, v > 0$ on note $u^v = \exp(v \log u)$. Il existe alors, pour tout $\sigma \in \Gamma$, un unique $\kappa_m(\sigma) \in \mathbb{Z}_l$ tel que, pour tout $n \geq 1$ ($n \geq 2$ si $l = 2$),

$$\sigma((\epsilon_{m,n}^{\frac{1}{l^n}}) = \sigma(\epsilon_{m,n})^{\frac{1}{l^n}} \zeta_n^{\kappa_m(\sigma)}$$

Ces applications κ_m sont les caractères de Soulé.

Si $l = 2$, $\epsilon_{3,2} = \epsilon_{3,3} = \epsilon_{5,3} = \epsilon_{5,2} = 2$, donc $\kappa_3(\sigma)$ et $\kappa_5(\sigma)$ sont congrus modulo 8. D'autre part, le fait que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\mu_8)$ implique que $\kappa_3(\sigma)$ est divisible par 2. Si $l = 3$ on a $\epsilon_{3,1} = \epsilon_{5,1} = (j-1)(j^2-1) = 3$, donc de même $\kappa_3(\sigma)$ est congru à $\kappa_5(\sigma)$ modulo 3.

On utilisera également la notation, à l fixé, $\kappa_m^*(\sigma) = \kappa_m(\sigma)/(l^{m-1}-1)$. Le principal résultat dont nous aurons besoin concernant ces caractères est le suivant :

Proposition 2.2. — *Pour tout nombre premier l, $\kappa_3 \neq 0$.*

Démonstration. — Si l est impair, cela découle du résultat général de Soulé sur la non trivialité des κ_m (cf. [14, 15], voir également [5]). Le cas $l = 2$ est élémentaire : il suffit en effet de montrer que $X^4 - 2$ n'admet pas de racine dans $L = \mathbb{Q}(\mu_{2^\infty})$, extension galoisienne abélienne de $\mathbb{Q}$. C'est le cas, soit parce que $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) \subset \mathbb{R}$ serait autrement une extension galoisienne de $\mathbb{Q}$ (car $\mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q})$ aurait $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})|\mathbb{Q})$ comme sous-groupe, nécessairement distingué), soit parce que $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, \mathrm{i})$, extension non abélienne de $\mathbb{Q}$, serait autrement incluse dans L. □

On a un morphisme $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q}) \to GT(\mathbb{Q}_l)$ (cf. [3, 6]). Son composé avec le morphisme naturel $GT(\mathbb{Q}_l) \to \mathbb{Q}_l^\times$ est la composante en l du caractère cyclotomique. On en déduit un morphisme m du groupe de Galois absolu de $\mathbb{Q}(\mu_{l^\infty})$ vers $GT_1(\mathbb{Q}_l)$. Pour alléger les notations, pour $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q}(\mu_{l^\infty}))$ nous noterons $\sigma.\Phi$, $\chi(\sigma)$ pour $m(\sigma).\Phi$, $\chi \circ m(\sigma)$.

2.7. $GT_1(\Bbbk)$ et $GRT_1(\Bbbk)$ en degré 3. — On note $w_x = [x,[x,y]]$ et $w_y = [y,[y,x]]$. Soient $\lambda \in \Bbbk$, $\Phi \in \mathbb{A}\mathrm{ss}_\lambda(\Bbbk)$, $f \in GRT_1(\Bbbk)$, $F \in GT_1(\Bbbk)$. Pour $a, b \in \mathcal{A}(\Bbbk)$, on note $a \equiv b$ si $\omega(a-b) \geq 4$. On sait qu'existe $\mathfrak{c} \in \Bbbk$ tel que $\Phi \equiv 1 + \frac{\lambda^2}{24}[x,y] + \mathfrak{c}(w_x - w_y)$. Comme $GRT_1(\Bbbk) = \mathbb{A}\mathrm{ss}_0(\Bbbk)$, il existe $z \in \Bbbk$ tel que $f \equiv 1 + z(w_x - w_y)$. Comme $F \in \mathcal{H}(\Bbbk)$, $F = \exp\psi$ pour un certain $\psi \in \mathcal{L}(\Bbbk)$. On a donc $\psi \equiv a_1 x + a_2 y + a_3[x,y] + a_4 w_x + a_5 w_y$ pour certaines valeurs des $a_i \in \Bbbk$. L'équation $F(u,v)F(v,u) = 1$ implique $a_2 = -a_1$ en degré 1, puis $a_1 = 0$ en degré 2, l'équation de l'hexagone en degré 2 implique $a_3 = 0$, et enfin la première équation en degré 3 implique $a_5 + a_4 = 0$: il existe donc $z' \in \Bbbk$ tel que $F = 1 + z'(w_x - w_y)$. Les valeurs $z, \lambda, \mathfrak{c}, z'$ étant fixées,

$$\begin{aligned}(\Phi.f)(x,y) = \Phi(fxf^{-1},y)f &\equiv 1 + \tfrac{\lambda^2}{24}[x,y] + (\mathfrak{c}+z)(w_x - w_y)\\ (F.\Phi)(x,y) = F(\Phi e^x \Phi^{-1}, e^y)\Phi &\equiv 1 + \tfrac{\lambda^2}{24}[x,y] + (\mathfrak{c}+z')(w_x - w_y)\end{aligned}$$

L'isomorphisme ι_Φ associé à Φ induit donc toujours l'identité en degré 3 (c'est également une conséquence élémentaire du théorème de Drinfeld selon lequel le gradué de l'algèbre de Lie de $GT_1(\mathbb{k})$ est isomorphe à $\mathfrak{grt}_1(\mathbb{k})$). D'autre part, $\mathfrak{grt}_1(\mathbb{k})$ est une $\mathbb{k}$-algèbre de Lie graduée qui contient l'élément $w_x - w_y$ donc, pour tout $z \in \mathbb{k}$, $GRT_1(\mathbb{k})$ contient l'exponentielle (au sens du groupe) de $z(w_x - w_y)$, qui est congrue à $1 + z(w_x - w_y)$. En particulier, on déduit des formules précédentes et de l'existence, pour tout $\lambda \in \mathbb{k}$, d'un associateur $\Phi \in \mathbb{A}\mathrm{ss}_\lambda(\mathbb{k})$ le lemme suivant.

LEMME 2. — *Pour tous* $\mathfrak{c}, \lambda \in \mathbb{k}$, *il existe* $\Phi \in \mathbb{A}\mathrm{ss}_\lambda(\mathbb{k})$ *tel que* $\mathfrak{c}(\Phi) = \mathfrak{c}$. *En particulier, pour tout* $\lambda \in \mathbb{k}$ *il existe* $\Phi \in \mathbb{A}\mathrm{ss}_\lambda(\mathbb{k})$ *tel que* $\mathfrak{c}(\Phi) \neq 0$.

Nous allons également déterminer le terme de degré 3 pour l'image du groupe de Galois. On a un morphisme du groupe de Galois absolu de $\mathbb{Q}(\mu_{l^\infty})$ vers le groupe de Grothendieck-Teichmüller pro-l, qui envoie un élément σ du groupe de Galois sur un élément f^σ du complété pro-l F_l du groupe libre en deux générateurs u, v. Il est classique que F_l se plonge dans $\mathcal{H}(\mathbb{Q}_l)$ par l'application $u \mapsto e^x$, $v \mapsto e^y$. L'image de f^σ par ce morphisme sera notée Df^σ. On a $Df^\sigma \in GT_1(\mathbb{Q}_l)$.

On peut également plonger F_l dans $\mathcal{A}(\mathbb{Z}_l)$ en envoyant u et v respectivement sur $1 + x$ et $1 + y$. On note $If^\sigma \in \mathcal{A}(\mathbb{Z}_l)$ l'image de f^σ par ce morphisme. On a immédiatement, dans $\mathcal{A}(\mathbb{Q}_l)$,

$$Df^\sigma(\log(1+x), \log(1+y)) = If^\sigma(x, y), \quad If^\sigma(e^x - 1, e^y - 1) = Df^\sigma(x, y).$$

Introduisons alors, suivant Y. Ihara (cf. [6]), la décomposition naturelle $\mathcal{A}(\mathbb{k}) = \mathbb{k} \oplus \mathcal{A}(\mathbb{k})x \oplus \mathcal{A}(\mathbb{k})y$, notons p_x la projection sur les deux premières composante, et π_{ab} la restriction du morphisme d'abélianisation $\mathcal{A}(\mathbb{k}) \to \mathbb{k}[x, y]$ à $\mathbb{k} \oplus \mathcal{A}(\mathbb{k})x$. Ihara montre que

$$\psi_{ab}^\sigma = \pi_{ab} \circ p_x(If^\sigma) = \exp\left(\sum_{\substack{m \geq 3 \\ m \text{ impair}}} \frac{\kappa_m^*(\sigma)}{m!} ((X + Y)^m - X^m - Y^m) \right)$$

avec $X = \log(1+x)$, $Y = \log(1+y)$. En particulier, $\psi_{ab}^\sigma \equiv 1 + \kappa_3^*(\sigma)(yx^2 + y^2x)/2$. Alors, si $Df^\sigma \equiv 1 + \alpha(w_x - w_y)$, on a $If^\sigma \equiv Df^\sigma$ et, de $\pi_{ab} \circ p_x(w_x) = -x^2y$ et $\pi_{ab} \circ p_x(w_y) = y^2x$, on déduit $\psi_{ab}^\sigma = 1 - \alpha(y^2x + yx^2)$ et $\alpha = -\kappa_3^*(\sigma)/2$. On a donc montré

LEMME 3. — *L'image de* $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q}(\mu_{l^\infty}))$ *dans* $GT_1(\mathbb{Q}_l)$ *vaut*

$$1 - \frac{\kappa_3^*(\sigma)}{2}([x, [x, y]] - [y, [y, x]])$$

plus des termes d'ordre supérieurs. Pour tout $\Phi \in \mathbb{A}\mathrm{ss}_\lambda(\mathbb{Q}_l)$,

$$\mathfrak{c}(\sigma.\Phi) = \mathfrak{c}(\Phi) - \frac{\kappa_3^*(\sigma)}{2}.$$

3. Action de $GT_1(\Bbbk)$ sur les représentations de B_n

3.1. Généralités. — Soit $\Bbbk$ un corps de caractéristique 0, $A = \Bbbk[[h]]$, $K = \Bbbk((h))$. Soit

$$V_N(\Bbbk) = \{R \in \mathrm{Hom}(B_n, GL_N(A)) \mid R(C^r P_n) \subset 1 + h^{r+1} M_N(A)\}.$$

On a $V_N(\Bbbk) \subset \mathrm{Hom}(B_n, GL_N(A)) \subset \mathrm{Hom}(B_n, GL_N(K))$. Tout $R \in V_N(\Bbbk)$ se prolonge naturellement en $\tilde{R} \in \mathrm{Hom}(B_n(\Bbbk), GL_N(A))$. On en déduit une action à gauche de $GT_1(\Bbbk)$ sur $V_N(\Bbbk)$: à $R \in V_N(\Bbbk)$ et $f \in GT_1(\Bbbk)$ est associé $f.R = S$ définie par $S(\sigma) = \tilde{R}(\sigma.f)$ pour tous $\sigma \in B_n$. Soit maintenant $\mathcal{V}(\Bbbk) = \mathrm{Hom}(\mathfrak{B}_n(\Bbbk), M_N(\Bbbk))$ et $\Phi \in \mathbb{A}\mathrm{ss}_\lambda(\Bbbk)$. A tout $\rho \in \mathcal{V}(\Bbbk)$ on associe $\overline{\rho} \in \mathrm{Hom}(\widehat{\mathfrak{B}_n(\Bbbk)}, M_N(A))$ définie par $\overline{\rho}(t_{ij}) = ht_{ij}$, $\overline{\rho}(s) = \rho(s)$ pour $s \in \mathfrak{S}_n$, et $\widehat{\Phi}(\rho) = \overline{\rho} \circ \widetilde{\Phi} \in \mathrm{Hom}(B_n, GL_N(A))$. On vérifie aisément $\widehat{\Phi}(\rho) \in V_N(\Bbbk)$. Les propriétés de théorie des représentations du foncteur $\widehat{\Phi}$ ont été étudiées par l'auteur dans [12].

Soit maintenant $f \in GT_1(\Bbbk)$. On a, pour tout $\sigma \in B_n$,

$$\begin{aligned}\left[f.\widehat{\Phi}(\rho)\right](\sigma) &= \widehat{\Phi}(\rho)(\sigma.f) & &= \overline{\rho} \circ \widetilde{\Phi}(\sigma.f) \\ &= \overline{\rho} \circ \widetilde{(f.\Phi)}(\sigma) & &= \widehat{(f.\Phi)}(\rho)(\sigma) \\ &= \widehat{\Phi.\iota_\Phi^{-1}(f)}(\rho)(\sigma) & &\end{aligned}$$

d'où $f.\widehat{\Phi}(\rho) = \widehat{f.\Phi}(\rho) = \widehat{\Phi.\iota_\Phi^{-1}(f)}(\rho)$. On s'intéresse ici à une classe particulière de représentations de B_n. Nous dirons d'une représentation $R : B_n \to GL_N(A)$ qu'elle est (absolument) irréductible s'il en est ainsi dans $GL_N(K)$. Deux telles représentations R et R' seront dites isomorphes si elles le sont dans $GL_N(K)$.

Définition 3.1. — Une représentation absolument irréductible $R \in V_N(\Bbbk)$ est dite *GT-rigide* si $g.R$ est isomorphe à R pour tout $g \in GT_1(\Bbbk)$.

Comme l'action de $GT_1(\Bbbk)$ sur $V_N(\Bbbk)$ commute à l'action par conjugaison à droite de $PGL_N(K)$ sur $\mathrm{Hom}(B_n, GL_N(K))$, on associe à tout $R \in V_N(\Bbbk)$ GT-rigide une représentation projective $Q_R : GT_1(\Bbbk) \to PGL_N(K)$ par $g.R = Q_R(g)^{-1} R Q_R(g) = R.Q_R(g)$.

Soit $\rho : \mathfrak{B}_n(\Bbbk) \to M_N(\Bbbk)$ une représentation absolument irréductible de $\mathfrak{B}_n(\Bbbk)$. D'après [12] la représentation $\widehat{\Phi}(\rho)$ associée est absolument irréductible pour tout $\Phi \in \mathbb{A}\mathrm{ss}_\lambda(\Bbbk)$, pourvu que $\lambda \in \Bbbk^\times$. Si $\widehat{\Phi}(\rho)$ est GT-rigide pour un tel Φ, il en sera de même pour tous. Par abus, nous dirons alors que ρ est GT-rigide.

D'autre part, si $R = \widehat{\Phi}(\rho)$ est GT-rigide, cette représentation s'étend en une représentation de $GT_1(L)$ dans $PGL_N(L((h)))$ pour tout surcorps L de $\Bbbk$. Enfin, pour toutes représentations $R_1 \in V_{N_1}(\Bbbk)$, $R_2 \in V_{N_2}(\Bbbk)$, $g \in GT_1(\Bbbk)$ et $\sigma \in B_n$, on a $R_1 \otimes R_2 \in V_{N_1N_2}(\Bbbk)$ et $(g.(R_1 \otimes R_2))(\sigma) = \widetilde{R_1 \otimes R_2}(\sigma.g) = \widetilde{R_1}(\sigma.g) \otimes \widetilde{R_2}(\sigma.g)$ donc $g.(R_1 \otimes R_2) = (g.R_1) \otimes (g.R_2)$. Si R_1 et R_2 sont GT-rigides, on en déduit que $R_1 \otimes R_2$ est conjuguée à $g.(R_1 \otimes R_2)$ par $Q_{R_1} \otimes Q_{R_2}$.

3.2. Agrégeance et caractères. —

3.2.1. Action de $\mathbb{G}_m(\Bbbk)$. — On identifie $\mathbb{G}_m(\Bbbk) = \Bbbk^\times$ à un sous-groupe des $\Bbbk$-automorphismes de $K = \Bbbk((h))$, en faisant agir $\alpha \in \mathbb{G}_m(\Bbbk)$ sur $f(h) \in K$ par $f \mapsto f^\alpha$ avec $f^\alpha(h) = f(\alpha h)$. L'anneau $A \subset K$ est laissé stable. Si $\Bbbk$ est un corps topologique, cette action est continue. Elle s'étend naturellement à $GL_N(K)$ et $PGL_N(K)$, donc également à $\mathrm{Hom}(G, GL_N(K))$ et $\mathrm{Hom}(G, PGL_N(K))$ pour tout groupe G. Soit $R \in V_N(\Bbbk)$. Il existe a priori deux façons de faire agir $\alpha \in \mathbb{G}_m(\Bbbk)$ sur $\tilde{R}$, soit par $\widetilde{R^\alpha}$, soit par $(\widetilde{R})^\alpha$, c'est-à-dire par l'action de $\mathbb{G}_m(\Bbbk)$ soit sur $\mathrm{Hom}(B_n, GL_N(A))$, soit sur $\mathrm{Hom}(B_n(\Bbbk), GL_N(K))$. Comme l'action de $\mathbb{G}_m(\Bbbk)$ sur K est continue pour la topologie h-adique (ce qui revient à munir $\Bbbk$ de la topologie discrète), on vérifie facilement que $\widetilde{R^\alpha} = (\widetilde{R})^\alpha$, donc que l'action de $\mathbb{G}_m(\Bbbk)$ est bien définie. De plus, $V_N(\Bbbk)$ est stable sous l'action de $\mathbb{G}_m(\Bbbk)$. On en déduit que l'action de $GT_1(\Bbbk)$ sur $V_N(\Bbbk)$ commute à celle de $\mathbb{G}_m(\Bbbk)$: pour tous $g \in GT_1(\Bbbk)$, $\alpha \in \mathbb{G}_m(\Bbbk)$, $g.R^\alpha = (g.R)^\alpha$. En particulier, si R est GT-rigide, R^α l'est également pour tout $\alpha \in \mathbb{G}_m(\Bbbk)$ et $Q_{R^\alpha} = (Q_R)^\alpha$. D'autre part, $\mathbb{G}_m(\Bbbk)$ agit par automorphismes sur $\mathfrak{B}_n(\Bbbk)$: à $\alpha \in \mathbb{G}_m(\Bbbk)$ on associe l'unique automorphisme d'algèbre de Hopf tel que $t_{ij} \mapsto \alpha t_{ij}$ pour $1 \leq i, j \leq n$ et qui laisse $\mathfrak{S}_n \subset \mathfrak{B}_n(\Bbbk)$ invariant. On en déduit une action $\rho \mapsto \rho^\alpha$ sur $\mathcal{V}_N(\Bbbk)$; elle vérifie $\widehat{\Phi}(\rho^\alpha) = \widehat{\Phi}(\rho)^\alpha$ pour tout $\Phi \in \mathbb{A}\mathrm{ss}_\lambda(\Bbbk)$.

3.2.2. Représentations agrégeantes. — Soit $\mathcal{D}_n$ la sous-algèbre de Lie commutative de $\mathcal{T}_n$ engendrée par $Y_2, \dots, Y_n$. Suivant [12] on appelle agrégeante toute $\rho : \mathfrak{B}_n(\Bbbk) \to M_N(\Bbbk)$ telle que $\rho(\mathsf{U}\mathcal{D}_n)$ égale la sous-algèbre de $M_N(\Bbbk)$ formée des matrices diagonales. Pour une représentation agrégeante, l'irréductibilité équivaut à l'absolue irréductibilité (cf. [11], cor. 2 de la prop. 3). De plus, si $\rho_1 \in \mathcal{V}_{N_1}(\Bbbk)$ et $\rho_2 \in \mathcal{V}_{N_2}(\Bbbk)$ sont deux représentations agrégeantes et (absolument) irréductibles, il en est de même de $\rho_1^{\alpha_1} \otimes \rho_2^{\alpha_2}$ pour $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{G}_m(\Bbbk)^2$ générique d'après [11].

Soit D_n le sous-groupe abélien libre de P_n engendré par $\delta_2, \ldots, \delta_n$. Supposons que $R \in V_N(\Bbbk)$ est GT-rigide et telle que $R(\delta_2), ..., R(\delta_n)$ engendre la sous-algèbre de $M_N(K)$ formée des matrices diagonales. Cette dernière condition est en particulier satisfaite si $R = \widehat{\Phi}(\rho)$ pour un certain $\Phi \in \mathbb{A}\mathrm{ss}_\lambda(\Bbbk)$, $\lambda \in \Bbbk^\times$ et $\rho \in \mathcal{V}_N(\Bbbk)$ agrégeante, puisqu'alors $R(\delta_r) = \exp(\lambda h Y_r)$ pour $r \in [2, n]$. D'autre part, pour tout $r \in [2, n]$ et pour tout $g \in GT_1(\Bbbk)$, $\delta_r.g = \delta_r$. Cette égalité peut se démontrer directement à partir des équations de définition de $GT_1(\Bbbk)$, ou se déduire de l'existence d'un $\Phi \in \mathbb{A}\mathrm{ss}_1(\Bbbk)$: on a $\widetilde{\Phi}(\delta_r.g) = \widetilde{(f.\Phi)}(\delta_r) = \widetilde{\Phi}(\delta_r)$, donc $\delta_r.g = \delta_r$. On en déduit $(g.R)(\delta_r) = R(\delta_r)$, donc tout $Q_R(g)$ commute à $R(\delta_r)$ pour tout $r \in [2, n]$, et appartient ainsi à l'image dans $PGL_N(K)$ des matrices diagonales inversibles de $M_N(K)$.

3.2.3. Propriétés des caractères. — Le morphisme de $(K^\times)^N$ vers $\mathbb{G}_m(K)^{N-1}$ défini par $(x_1, \ldots, x_N) \mapsto (x_2/x_1, x_3/x_2, \ldots, x_N/x_{N-1})$ de noyau $K^\times$ induit un isomorphisme $(K^\times)^N/K^\times \to \mathbb{G}_m(K)^{N-1}$. On en déduit $N-1$ caractères $GT_1(\Bbbk) \to \mathbb{G}_m(K)$ de $GT_1(\Bbbk)$ que l'on numérote $Q_{R,2}, \ldots, Q_{R,N}$ suivant l'ordre des vecteurs de base de K^N. Naturellement et par convention, on pose $Q_{R,1} = 1$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{G}_m(\Bbbk)$ on a $Q_{R^\alpha,i} = (Q_{R,i})^\alpha$. Si ces $N-1$ caractères sont distincts et non triviaux, nous dirons que R est *sans résonnances.* Cette dernière propriété ne dépend pas de l'ordre des vecteurs de base que l'on a choisi.

De plus, comme R est absolument irréductible, il existe $\sigma \in \Bbbk B_n$ tel que $R(\sigma) \in M_N(A)$ ait tous ses coefficients non nuls. Pour tout $g \in GT_1(\Bbbk)$, on a alors $Q_R(g)(g.R)(\sigma) = R(\sigma)Q_R(g)$. Si l'on note sous forme matricielle $R(\sigma) = (x_{ij})$, $(g.R)(\sigma) = (y_{ij}(g))$ pour $1 \leq i, j \leq N$, $Q_R(g) = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ avec $a_i = Q_{R,i}(g)$, cette équation est équivalente à $x_{ij}a_j = a_i y_{i,j}(g)$ pour tous i, j. En particulier, $Q_{R,j}(g) = y_{1,j}(g)/x_{1,j}$ pour tout j. Si $\Bbbk$ est un corps topologique on en déduit que chaque $Q_{R,i}$ est continu, chaque $y_{1,j}$ étant une fonction continue de $g \in GT_1(\Bbbk)$.

Pour $R \in V_N(\Bbbk)$, notons $\overline{R} \in \mathrm{Hom}(B_n, GL_N(\Bbbk))$ la réduction de R modulo h. Comme $R(P_n) \subset 1 + hM_N(A)$, $\overline{R}$ se factorise par $\mathfrak{S}_n$. C'est la représentation du groupe symétrique associée à R. Si $R = \widehat{\Phi}(\rho)$, $\overline{R}$ s'identifie à la restriction de ρ à $\mathfrak{S}_n$. Pour la représentation R choisie ici, si $\overline{R}$ est (absolument) irréductible on peut choisir $\sigma \in \Bbbk B_n$ tel que $\overline{R}(\sigma)$ ait tous ses coefficients non nuls, donc chaque x_{1j} est inversible dans A. On en déduit que chaque $Q_{R,i}$ est alors à valeur dans $\mathbb{G}_m(A)$. Nous avons montré dans [9] que cette situation (i.e. que $\overline{R}$ est absolument irréductible) a lieu essentiellement lorsque R se factorise par l'algèbre d'Iwahori-Hecke (cf. [9]).

3.3. Continuité.— Nous démontrons que les représentations projectives $Q_R : GT_1(\Bbbk) \to K^\times$ sont continues si $\Bbbk$ est un corps topologique. Cela découle de considérations générales que nous rappelons ici par manque de références adéquates.

Si K est un corps topologique et $\mathcal{A}$ une K-algèbre à unité de type fini (munie de la topologie induite), l'ensemble de morphismes d'algèbres à unité $\mathrm{Hom}(\mathcal{A}, M_N(K))$ est naturellement muni d'une topologie. Elle est telle que si $g_1, \dots, g_r$ forment un système quelconque de générateurs de $\mathcal{A}$, l'application $R \mapsto (R(g_i))_{i=1..r} \in M_N(K)^r$ est un homéomorphisme de $\mathcal{A}$ sur son image. Pour $R \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A}, M_N(K))$ on note $\mathcal{O}(R)$ son image sous l'action par conjugaison de $PGL_N(K)$. On a alors la

Proposition 3.2. — *Si $R \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A}, M_N(K))$ est absolument irréductible, alors $P \mapsto P.R$ est un homéomorphisme de $PGL_N(K)$ sur $\mathcal{O}(R)$.*

Démonstration. — La bijectivité découle du lemme de Schur. Il s'agit de montrer que la réciproque est continue. D'après le théorème de Burnside $R(\mathcal{A}) = M_N(K)$ donc quitte à quotienter par $\mathrm{Ker}\, R$ on peut supposer R bijective. On note (E_{ij}) pour $1 \leq i,j \leq N$ la famille des matrices élémentaires de $M_N(K)$ et $g_{ij} = R^{-1}(E_{ij})$. On plonge $\mathrm{Hom}(\mathcal{A}, M_N(K))$ dans $M_N^*(K)^{N^2}$ (de façon $PGL_N(K)$-équivariante) suivant ces générateurs, où l'on note $M_N^*(K) = M_N(K) \setminus \{0\}$. Soit $(A^{u,v})$ pour $1 \leq u,v \leq N$ un élément de $M_N^*(K)^{N^2}$ avec $A^{u,v}$ matrice de terme général $(a_{i,j}^{u,v})$. Soit $P \in GL_N(K)$, $Q = P^{-1}$ de terme général $(p_{i,j})$, $(q_{i,j})$. Si, pour tous u,v, on a $PE_{u,v}Q = A^{u,v}$, c'est-à-dire $p_{iu}q_{vj} = a_{ij}^{uv}$ pour tous i,j,u,v, il existe i_0, j_0, u_0, v_0 tels que $\beta = a_{i_0 j_0}^{u_0 v_0} \neq 0$, d'où $p_{i_0 u_0} \neq 0$, $q_{v_0 j_0} \neq 0$. La restriction de l'inverse de $P \mapsto P.R$ à l'ouvert de $\mathcal{O}(R)$ défini par $a_{i_0 j_0}^{u_0 v_0} \neq 0$ est alors donné par la classe dans $PGL_N(K)$ de $(a_{i j_0}^{u v_0})_{i,u}$ puisqu'alors $a_{i,j_0}^{u v_0}/\beta = p_{iu}/p_{i_0 u_0}$, et est donc continue. $\square$

On en déduit immédiatement :

Corollaire. — *Si R est une représentation GT-rigide de B_n, Q_R : $GT_1(\Bbbk) \to PGL_N(K)$ est continue.*

3.4. Trivialité.— Nous donnons une caractérisation des représentations GT-rigides R pour lesquelles Q_R est triviale.

Proposition 3.3. — *Soit ρ une représentation GT-rigide de $\mathfrak{B}_n(\Bbbk)$, $n \geq 3$, $\Phi \in \mathbb{A}\mathrm{ss}_\lambda(\Bbbk)$, $\lambda \neq 0$, $R = \widehat{\Phi}(\rho)$. Les conditions suivantes sont équivalentes*

(i) Q_R est triviale.

(ii) $\rho([t_{12}, t_{23}]) = 0$.

(iii) $R([P_n, P_n]) = \{1\}$.

Si $\Bbbk = \mathbb{Q}_l$, ces conditions sont encore équivalentes à

(iv) $\forall \sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q}(\mu_{l^\infty}))$ $Q_R(\sigma) = 1$.

Démonstration. — L'équivalence $(ii) \Leftrightarrow (iii)$ est démontrée dans [12], lemme 5. $(ii) \Rightarrow (i)$ découle du fait qu'alors $\widehat{\Phi}'(\rho) = \widehat{\Phi}(\rho)$ pour tout $\Phi' \in \mathbb{A}\mathrm{ss}_\lambda(\Bbbk)$, parce que l'image par ρ de $\mathcal{T}_n(\Bbbk)$ est alors commutative. On montre $(i) \Rightarrow (ii)$ à partir du calcul explicite (cf. [12] prop. 3)

$$\widehat{\Phi}_2(\rho)(\sigma_2) - \widehat{\Phi}_1(\rho)(\sigma_2) = \rho(s_2)(\mathfrak{c}(\Phi_1) - \mathfrak{c}(\Phi_2))\rho([t_{23}, [t_{23}, t_{12}]])$$

plus des termes d'ordres supérieurs, pour tous $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathbb{A}\mathrm{ss}_\lambda(\Bbbk)$. D'après le lemme 2 on peut en effet supposer $\mathfrak{c}(\Phi) \neq 0$. Alors $\overline{\Phi} \in \mathbb{A}\mathrm{ss}_\lambda(k)$ et $\mathfrak{c}(\overline{\Phi}) = -\mathfrak{c}(\Phi) \neq \mathfrak{c}(\Phi)$. Si Q_R est triviale, $\widehat{\Phi}(\rho)(\sigma_2) = \widehat{\overline{\Phi}}(\rho)(\sigma_2)$. On a alors $\rho([t_{23}, [t_{23}, t_{12}]]) = 0$. Comme la restriction de ρ à $\mathcal{T}_3 = \mathcal{T}_3(\Bbbk)$ est $\mathfrak{S}_3$-équivariante on a aussi $\rho([t_{12}, [t_{12}, t_{23}]]) = 0$. Soit $\mathcal{T}'$ la sous-algèbre de Lie de $\mathcal{T}_3$ engendrée par t_{12} et t_{23}. On a $\mathcal{T}_3 = \mathcal{T}' \oplus \Bbbk T$ avec $T = t_{12} + t_{13} + t_{23}$, $\Bbbk T = Z(\mathcal{T}_3)$, $\mathcal{T}' \simeq \mathcal{T}_3/Z(\mathcal{T}_3)$. La restriction de ρ à $\mathcal{T}'$ annule ainsi $[\mathcal{T}', [\mathcal{T}', \mathcal{T}']]$, donc se factorise par une algèbre de Lie nilpotente, donc résoluble. La restriction de ρ à $\mathcal{T}_3$, donc à $\mathcal{T}' \simeq \mathcal{T}_3/Z(\mathcal{T}_3)$, est semi-simple (cf. [12] 5.2, lemme 6). On en déduit que la restriction de ρ à $\mathcal{T}'$ est commutative (cf. [1] ch. I §5 no. 3 p. 65, cor. 1 du th. 1), et en particulier $\rho([t_{12}, t_{23}]) = 0$. Enfin, si $\Bbbk = \mathbb{Q}_l$ on a naturellement $(i) \Rightarrow (iv)$, et la démonstration de $(iv) \Rightarrow (ii)$ est analogue à celle de $(i) \Rightarrow (ii)$ car pour tout $\Phi \in \mathbb{A}\mathrm{ss}_\lambda(\Bbbk)$ il existe $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q}(\mu_{l^\infty}))$ tel que $\mathfrak{c}(\sigma.\Phi) \neq \mathfrak{c}(\Phi)$ d'après le lemme 3 et la proposition 2.2. $\square$

Lorsque $\Bbbk$ est un corps topologique et la représentation GT-rigide considérée est agrégeante, la représentation projective de $GT_1(\Bbbk)$ se décompose en caractères continus $\chi : GT_1(\Bbbk) \to \Bbbk((h))^\times$ qui ont les propriétés suivantes : a) si L est un surcorps de $\Bbbk$, χ s'étend en $\tilde{\chi}$: $GT_1(L) \to L((h))^\times$; b) pour toute topologie sur $\Bbbk$ compatible à sa structure de corps, $\tilde{\chi}$ est continue dès que l'inclusion $\Bbbk \subset L$ est continue. Nous aurons besoin du lemme suivant.

LEMME 4. — *Soit $\chi : GT_1(\mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}((h))^\times$ un caractère vérifiant les conditions a) et b), et g_0 l'unique élément de $GT_1(\mathbb{C})$ tel que $g_0.\Phi_{KZ} = \overline{\Phi}_{KZ}$. Si $\chi(g_0) \neq 1$, alors χ est non triviale.*

Démonstration. — Pour tout nombre premier l, on peut choisir un rationnel $\beta_l > 0$ tel que $\sqrt{-\beta_l} \in \mathbb{Q}_l$ (par exemple $\beta_2 = 7$ et $\beta_l = l - 1$ si $l \neq 2$). Soit $L = \mathbb{Q}(\sqrt{-\beta_l}) \subset \mathbb{C}$. Pour la topologie naturelle de $\mathbb{C}$, les inclusions $\mathbb{Q} \subset L \subset \mathbb{C}$ sont des inclusions de corps topologiques. Comme $\beta_l > 0$, L est dense dans $\mathbb{C}$ donc $GT_1(L)$ est dense dans $GT_1(\mathbb{C})$ d'après le théorème 2.1 et il existe donc $g \in GT_1(L)$ tel que $\chi(g') \neq 1$ par continuité. En particulier, pour tout corps L' isomorphe à L il existe $g' \in GT_1(L')$ tel que $\chi(g') \neq 1$. Prenant pour L' l'extension de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}_l$ engendrée par $\sqrt{-\beta_l}$ on en déduit qu'existe $g' \in GT_1(\mathbb{Q}_l)$ tel que $\chi(g') \neq 1$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{Q}_l$ on déduit du théorème 2.1 qu'existe $g'' \in GT_1(\mathbb{Q})$ tel que $\chi(g'') \neq 1$. □

3.5. Exemples. — Les exemples les plus simples de représentations GT-rigides et agrégeantes proviennent de l'algèbre d'Iwahori-Hecke de type A, et sont étudiées dans la partie suivante. Dans [3], th. A (voir aussi [2] prop. 16.1.6), Drinfeld montre que toutes les composantes (absolument) irréductibles des représentations de type Yang-Baxter de B_n sont GT-rigides. Enfin, il n'est pas difficile de montrer, en reprenant les arguments de [10] prop. 4, et en utilisant le th. 4 de [10], que les représentations de l'algèbre de Birman-Wenzl-Murakami sont GT-rigides et agrégeantes (voir également [11] th. 2). Nous déterminons en appendice la forme générale d'un élément de $GT_1(\Bbbk)$ modulo des termes d'ordres au moins 6. Chacun de ces éléments est congru à l'un des éléments $g_{a,b}$, définis dans l'appendice, pour $a, b \in \Bbbk$. Cela nous permet de calculer jusqu'en degré 5 les valeurs des caractères associés à une telle représentation, si l'on sait décrire une représentation infinitésimale correspondante. Comme exemple, nous considérons la représentation irréductible de dimension 3 la plus générale de $\mathfrak{B}_3(\Bbbk)$, définie par $s_1 =$

$\mathrm{diag}(1,1,-1)$, $t_{12} = \mathrm{diag}(\frac{3+v}{2}, \frac{3-v}{2}, 0)$ et

$$s_2 = \frac{1}{4v}\begin{pmatrix} v-3 & 3(v-1) & 3(v+1) \\ 3(v+1) & 3+v & -3(v+1) \\ 2v & 2v\frac{1-v}{1+v} & 2v \end{pmatrix}$$

On a $t_{13}+t_{23} = \mathrm{diag}(\frac{3-v}{2}, \frac{3+v}{2}, 3)$, donc cette représentation irréductible est agrégeante si $v \notin \{-3,0,3\}$. Elle est également GT-rigide, car elle correspond à une représentation de l'algèbre de Birman-Wenzl-Murakami, ou encore à une représentation de l'algèbre de Hecke cyclotomique du groupe de réflexions complexes G_4 (cf. [12]). Soit $\Phi_0 \in \mathbb{A}\mathrm{ss}_1$ et $R = \widehat{\Phi}(\rho)$. On en déduit deux caractères $Q_{R,2}$ et $Q_{R,3}$ tels que

$$Q_{R,2}(g_{a,b}) = 1 - \frac{1}{8}av(v^2-9)h^3 - \frac{9}{64}v(v^2-9)(v^2+7)bh^5 + \dots$$

et $Q_{R,3}(g_{a,b})$ vaut

$$1+\frac{1}{16}a(v+9)(v^2-9)h^3+\frac{9}{128}(v+5)(v^2-9)(v^2-4v+27)b(v^2+7)h^5+\dots$$

4. Algèbre de Hecke et caractères de $GT_1(\Bbbk)$

4.1. Algèbre d'Iwahori-Hecke de type A. — Soit $q \in K^\times$ un scalaire non nul. L'algèbre d'Iwahori-Hecke de type A est notée $H_n(q)$. C'est le quotient de KB_n par la relation $(\sigma_1 - q)(\sigma_1 + q^{-1}) = 0$. On a $H_n(1) = K\mathfrak{S}_n$, et $H_n(q)$ est isomorphe à $K\mathfrak{S}_n$ pour q non racine de l'unité. A toute partition α de n on associe classiquement, de façon uniforme en q, une classe d'isomorphisme de représentations de $H_n(q)$, de sorte que la partition $[n]$ corresponde à la représentation $\sigma_r \mapsto q \in GL_1(K)$ de B_n.

Nos conventions sur les diagrammes de Young sont telles que la partition $[3,2]$ est représenté par le diagramme à deux colonnes $\begin{smallmatrix}\square & \\ \square & \square \\ \square & \square\end{smallmatrix}$. Dans le tableau de Young standard $\begin{smallmatrix}2 & \\ 1 & 3\end{smallmatrix}$ la case contenant un 2 est en colonne 1 et ligne 2. A tout tableau de Young standard T de taille n est associé un $(n-1)$-uplet appelé son contenu, défini comme $(l_i(T) - c_i(T))_{i=2..n}$ où $l_i(T)$ (resp. $c_i(T)$) désigne la ligne (resp. la colonne) où se trouve i. Cette correspondance est injective, et identifie les tableaux standard de taille n à certains éléments de $\mathbb{Z}^{n-1}$. On munit $\mathbb{Z}^{n-1}$ de l'ordre inverse de l'ordre lexicographique, et l'ensemble des tableaux standard de même taille de l'ordre induit.

On décrit maintenant des expressions matricielles de ces représentations. Soit α une partition de n ; on introduit le K-espace vectoriel de base les tableaux de Young standard de forme α. Pour $r \in [1, n-1]$ on fait agir $\sigma_r \in B_n$ sur un tableau standard T comme suit. Si r et $r+1$ se trouvent sur la même colonne (resp. ligne) de T, $\sigma_r.T = qT$ (resp. $\sigma_r.T = -q^{-1}T$). Sinon, soit T' le tableau (standard) déduit de T par transposition de r et $r+1$ dans T. Quitte à échanger les rôles de T et T', on peut supposer que la colonne de T où se trouve r précède celle où se trouve $r+1$, ce qui revient à demander $T < T'$. On note d la *distance axiale* entre r et $r+1$ dans T. Si r (resp. $r+1$) se trouve dans T en colonne c (resp. c') et ligne l (resp. l'), elle est définie par $d = l - l' + c' - c$, et est donc nécessairement positive. On demande que l'action de σ_r laisse le plan engendré par T et T' stable, et que sa restriction soit donnée sur la base (T, T') par une matrice M_d^q ne dépendant que de d et q. On appelle *modèle matriciel* de $H_n(q)$ toute collection $(M_d^q)_{d\geq 2}$ telle que la construction précédente fournisse une représentation de $H_n(q)$ de classe correspondant à la partition α, pour toute partition α et tout $n \geq 2$, ceci pour presque tout q. Il est immédiat que chaque M_d^q doit avoir pour trace $q - q^{-1}$ et déterminant -1, et donc être de la forme

$$\begin{pmatrix} a_d & b_d \\ \frac{1+a_d a'_d}{b_d} & a'_d \end{pmatrix}$$

avec $a_d \in K$, $b_d \in K^\times$, $a'_d = q - q^{-1} - a_d$, et $1 + a_d a'_d \neq 0$ pour q générique. On vérifie facilement que toute collection $(M_d^q)_{d\geq 2}$ définie par de tels coefficients a_d, b_d, définit bien un modèle matriciel si et seulement si $a_{d+1}(q - a_d) = a_d q^{-1}$ pour tout $d \geq 2$ avec $a_2 = -1/q(q^2+1)$. On en déduit les formules générales $a_d = (1-q^2)/q(q^{2d}-1)$, $a'_d = q^{2d-1}(q^2-1)/(q^{2d}-1)$. Un modèle est donc arbitrairement déterminé par le choix d'une suite $(b_d)_{d\geq 2}$ d'éléments de $K^\times$. Quel que soit le choix de ces scalaires, chaque tableau standard est un vecteur propre commun des $\delta_r, r \in [2, n]$. Si le contenu de T est $(c_2, \dots, c_n)$, $\delta_r.T = q^{2c_r}T$.

De façon analogue, on appelle *modèle matriciel* du groupe symétrique une suite $(M_d)_{d\geq 2}$ avec $M_d \in GL_2(\mathbb{k})$ telle que la construction précédente donne, pour $q = 1$, les représentations du groupe symétrique. Deux d'entre eux nous seront utiles, le modèle semi-normal et le modèle orthonormal de Young, respectivement donnés par

$$\frac{1}{d}\begin{pmatrix} -1 & d+1 \\ d-1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{1}{d}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{d^2-1} \\ \sqrt{d^2-1} & 1 \end{pmatrix}$$

4.2. Représentations infinitésimales. — Soit $\rho_0 : \mathfrak{S}_n \to GL_N(\Bbbk)$ une représentation du groupe symétrique. Elle s'étend en une représentation ρ de $\mathfrak{B}_n(\Bbbk)$ par la formule $\rho(t_{ij}) = 2\rho((i\ j))$. Pour tout $\Phi \in \mathbb{A}\mathrm{ss}_1(\Bbbk)$, $\widehat{\Phi}(\rho)(\sigma_1) = \rho(s_1)\exp(h\rho(s_1))$ est semi-simple à valeurs propres $q = e^h$ et $-q^{-1}$, donc $\widehat{\Phi}(\rho)$ se factorise par $H_n(q)$ pour $q = e^h$. Si ρ_0 est absolument irréductible il en est de même de ρ et de $\widehat{\Phi}(\rho)$. De plus, ρ est alors agrégeante et $\widehat{\Phi}(\rho)$ permet de définir des caractères de $GT_1(\Bbbk)$.

Fixons un modèle matriciel $(M_d^1)_{d\geq 2}$ du groupe symétrique, et étendons l'action de $\mathfrak{S}_n$ sur les tableaux standard en une action de $\mathfrak{B}_n$ suivant la formule précédente. Si T est un tableau standard de contenu $(c_2, \dots, c_n)$ on a $Y_r.T = 2c_rT$ pour tout $r \in [2, n]$. En particulier, si T est un tableau standard contenant r et $r+1$ dans la même colonne (resp. la même ligne), la droite engendrée par T est stable par Y_r et $t_{r,r+1}$. On fixe désormais $\Phi \in \mathbb{A}\mathrm{ss}_1(\Bbbk)$ et on fait agir (K-linéairement) B_n sur les tableaux standard selon $\widehat{\Phi}(\rho)$. Comme Φ est l'exponentielle d'une série de Lie Ψ sans terme linéaire, $\Phi(Y_r, t_{r,r+1})$ laisse alors T invariant donc $\sigma_r.T = s_r\exp(hs_r).T$ vaut qT (resp. $-q^{-1}T$). Dans le cas contraire, soit T' le tableau standard déduit de T par transposition de r et $r+1$, notons $(c'_2, \dots, c'_n)$ son contenu et supposons $T < T'$. Le plan engendré par T et T' est stable par s_r, Y_r et Y_{r+1}, donc par σ_r. L'expression de $s_r\exp(hs_r)$ dans la base (T, T') vaut $M_d^1\exp(hM_d^1)$, avec d la distance axiale associée au couple (T, T'). D'autre part, $Y_r + Y_{r+1}$ commute à Y_r et $t_{r,r+1}$, et $Y_r = (Y_r + Y_{r+1})/2 + (Y_r - Y_{r+1})/2$, donc $\Phi(Y_r, t_{r,r+1}) = \Phi((Y_r - Y_{r+1})/2, t_{r,r+1})$ car $\Phi = \exp\Psi$ avec $\Psi \in \mathcal{L}(\Bbbk)$ sans terme linéaire. Comme $t_{r,r+1}$ agit par $2M_d^1$ et $(Y_r - Y_{r+1})/2$ par la matrice diagonale η_d de coefficients $(c_r - c'_r, c_{r+1} - c'_{r+1}) = (d, -d)$, l'expression de σ_r dans la base (T, T') ne dépend que de d et q, et fournit ainsi un modèle matriciel $(M_d^q)_{d\geq 2}$ de $H_n(q)$, tel que $M_d^q \equiv M_d^1$ modulo h. En particulier, à tout $\Phi \in \mathbb{A}\mathrm{ss}_1(\Bbbk)$ est ainsi attaché un modèle $(M_d^q(\Phi))_{d\geq 2}$ et une suite de scalaires $b_d(\Phi) \in K^\times$, $d \geq 2$. On remarque que, comme $(M_d^1)^2 = 1$, pour tout $\Phi \in \mathbb{A}\mathrm{ss}_1(\Bbbk)$, on a $2M_d^q(\Phi) = (q - q^{-1}) + (q + q^{-1})QM_d^1Q^{-1}$ avec $Q = \Phi(2hM_d^1, h\eta_d)$. Comme nous n'utiliserons que deux modèles du groupe symétrique, nous noterons $b_d^s(\Phi)$ et $b_d^o(\Phi)$ les scalaires $b_d(\Phi)$ correspondant respectivement aux modèles semi-normal et orthogonal. Comme ces deux modèles sont conjugués par la matrice diagonale de coefficients $(\sqrt{d+1}, \sqrt{d-1})$, on en déduit que ces deux nombres sont liés par la relation $b_d^s(\Phi)\sqrt{d-1} = b_d^o(\Phi)\sqrt{d+1}$. Un calcul explicite montre d'autre part aisément que

$$\frac{d}{d+1} b_d^s(\Phi) = 1 + \frac{h^2}{6} + 16\mathfrak{c}(\Phi) d h^3 + o(h^3).$$

4.3. L'associateur KZ. — Dans sa thèse [4], Jorge González-Lorca a calculé $M_d^q(\Phi_{KZ})$, donc $b_d(\Phi_{KZ})$. Pour la commodité du lecteur mais aussi parce que nous aurons également besoin de connaître $b_d(\overline{\Phi}_{KZ})$, nous reprenons ici les dernières étapes de ce calcul. On a ici $\Bbbk = \mathbb{C}$, $A = \mathbb{C}[[h]]$, $K = \mathbb{C}((h))$. On note $\hbar = h/(2\mathrm{i}\pi)$ et l'on suppose M_d^1 donné par le modèle semi-normal. On introduit la fonction de trois variables complexes

$$\Gamma_3(a,b,c) = \frac{\Gamma(1-2a)\Gamma(1+2b)}{\Gamma(1+b-a+\delta)\Gamma(1+b-a-\delta)}$$

où δ désigne une racine carrée de a^2+b^2+2c et Γ est la fonction Gamma d'Euler. Comme $\Gamma(1+z)$ est analytique au voisinage de 0, on peut définir $\Gamma_3(\alpha,\beta,\gamma) \in K$ pour $\alpha,\beta,\gamma \in hA$ et $F(a,b) = \Gamma_3(\hbar a, \hbar b, -2\hbar^2) \in K$ pour $a,b \in \Bbbk$. Pour tout $X \in M_N(\Bbbk)$ et $x \in Sp(X)$ on note $P_{x,X} \in M_N(\Bbbk) \subset M_N(K)$ le projecteur sur l'espace propre $\mathrm{Ker}(X-x)$ naturellement associé et on définit $F(U,V)$, pour $U,V \in M_N(\Bbbk)$ semi-simples, comme la somme des termes $F(u,v)P_{u,U}P_{v,V}$ sur tous les couples $(u,v) \in Sp(U) \times Sp(V)$. Pour traiter simultanément les cas de Φ_{KZ} et $\overline{\Phi}_{KZ}$, on introduit un paramètre $\epsilon = \pm 1$ et l'on pose $F_\epsilon(a,b) = F(\epsilon a, \epsilon b)$.

Pour alléger les notations, notons $U = \eta_d$, $V = 2M_d^1$ et $S = M_d^1$. En utilisant le fait que $UV + VU = -4$ et les méthodes de Riemann et Kummer sur l'équation hypergéométrique, J. González-Lorca montre dans [4] que $\Phi_{KZ}(\tilde{U},\tilde{V}) = F_\epsilon(V,U)$, $\Phi_{KZ}(\tilde{V},\tilde{U}) = F_\epsilon(U,V)$, où l'on note $\tilde{U} = \epsilon h U$, $\tilde{V} = \epsilon h V$. On en déduit $M_d^q(\Phi)$ pour $\Phi = \Phi_{KZ}$ (si $\epsilon = 1$) et $\Phi = \overline{\Phi}_{KZ}$ (si $\epsilon = -1$) comme suit. Soit $P_\pm = P_{\pm 1,S} = P_{\pm 2,V}$. On a

$$\begin{aligned} F_\epsilon(U,V) &= F_\epsilon(U,2)P_+ + F_\epsilon(U,-2)P_- \\ F_\epsilon(V,U) &= P_+F_\epsilon(2,U) + P_-F_\epsilon(-2,U) \end{aligned}$$

donc $\Phi_{KZ}(\tilde{V},\tilde{U})S\Phi_{KZ}(\tilde{U},\tilde{V})$ est égal à la différence $F_\epsilon(U,2)P_+F_\epsilon(2,U)$ $-F_\epsilon(U,-2)P_-F_\epsilon(-2,U)$ et ainsi son coefficient en première ligne et deuxième colonne vaut

$$\frac{d+1}{2d}\left[F_\epsilon(d,2)F_\epsilon(2,-d) + F_\epsilon(d,-2)F_\epsilon(-2,-d)\right].$$

On en déduit

$$\begin{aligned} b_d^s(\Phi_{KZ}) &= \tfrac{d+1}{2d}\tfrac{q+q^{-1}}{2}(Z(d,2)+Z(d,-2)) \\ b_d^s(\overline{\Phi}_{KZ}) &= \tfrac{d+1}{2d}\tfrac{q+q^{-1}}{2}(Z(-d,-2)+Z(-d,2)) \end{aligned}$$

avec $Z(a,b) = F(a,b)F(b,-a)$, donc $b_d^s(\Phi_{KZ})/b_d^s(\overline{\Phi}_{KZ})$ vaut $\tilde{J}(d+1)\tilde{J}(d-1)/\tilde{J}(d)^2$ avec $\tilde{J}(x) = J(2\hbar x)$ et

$$J(x) = \frac{\Gamma(1+x)}{\Gamma(1-x)} = \exp\left(-2\gamma x - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta(2n+1)}{2n+1}x^{2n+1}\right)$$

où γ est la constante d'Euler. Ainsi,

$$(*) \quad \frac{b_d^s(\Phi_{KZ})}{b_d^s(\overline{\Phi}_{KZ})} = \exp\left(-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta(2n+1)}{2n+1}2^{2n+1}\hbar^{2n+1}Q_n(d)\right)$$

avec $Q_n(d) = (d+1)^{2n+1} + (d-1)^{2n+1} - 2d^{2n+1}$.

4.4. Associateurs pairs. — Soit $\Phi \in \mathbb{A}\mathrm{ss}_1^0(\mathbb{k})$, et choisissons pour M_d^1 le modèle orthonormal de Young, de telle sorte que M_d^1 est simultanément orthogonale et symétrique pour tout $d \geq 2$. On en déduit que $M_d^1 \exp(hM_d^1)$ est également symétrique. Soit Ψ la série de Lie sans terme linéaire telle que $\Phi = \exp \Psi$. Comme η_d est symétrique et $x \mapsto -{}^t x$ est un automorphisme de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}_N(K)$, la transposée de $\Psi(h\eta_d, hM_d^1)$ vaut $-\Psi(-h\eta_d, -hM_d^1)$. On en déduit

$${}^t\Phi(h\eta_d, hM_d^1) = \Phi(-h\eta_d, -hM_d^1)^{-1} = \Phi(h\eta_d, hM_d^1)^{-1}$$

et qu'ainsi $M_d^q(\Phi)$ est symétrique. On a donc $b_d^o(\Phi)^2 = 1 + a_d a_d'$. Comme $1 + a_d a_d'$ est congru à $(d^2-1)/d \neq 0$ modulo h, il existe un unique $b_d^0(\Phi) \in A$ vérifiant cette équation qui soit de plus congru à $\sqrt{d^2-1}/d$ modulo h. Avec les notations des q-analogues $[n]_q = (q^n - q^{-n})/(q-q^{-1})$, on trouve $b_d^o(\Phi) = \sqrt{[d+1]_q[d-1]_q}/[d]_q$ d'où

$$b_d^s(\Phi) = \frac{\sqrt{d+1}\sqrt{[d+1]_q[d-1]_q}}{\sqrt{d-1}[d]_q} = \frac{d+1}{d}\left(1 + \frac{h^2}{3!} - \frac{4d^2-1}{5!}h^4 + \dots\right)$$

Remarquons qu'avec ces notations, $a_d = -q^{-d}/[d]_q$, $a_d' = q^d/[d]_q$. Comme $\mathbb{k} \subset \mathbb{R}$ on note comme conséquence immédiate de ces calculs

Proposition 4.1. — *Un modèle matriciel de $H_n(q)$ unitaire au sens de* [12] *est donné par*

$$M_d^q(\Phi) = \frac{1}{[d]_q}\begin{pmatrix} -q^{-d} & \sqrt{[d+1]_q[d-1]_q} \\ \sqrt{[d+1]_q[d-1]_q} & q^d \end{pmatrix}$$

Afin de comparer $b_d^s(\Phi)$ et $b_d^s(\Phi_{KZ})$, on introduit les fonctions

$$I(z)=\Gamma(1+z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi z}{\sin(\pi z)}\quad \tilde{I}(z)=I(2z\hbar).$$

Comme $(q^n-q^{-n})/2=\mathrm{i}\sin(2n\pi\hbar)=nh/\tilde{I}(n)$, on a

$$b_d^s(\Phi)=\frac{d+1}{d}\frac{\tilde{I}(d)}{\sqrt{\tilde{I}(d+1)\tilde{I}(d-1)}}$$

d'où, en utilisant $(q+q^{-1})\tilde{I}(2)/2\tilde{I}(1)=1$ et l'expression de $\Gamma(1\pm x)$ en fonction de I et J, on obtient

$$\frac{b_d^s(\Phi_{KZ})}{b_d^s(\Phi)}=\tilde{H}(d)\text{ et }\frac{b_d^s(\overline{\Phi}_{KZ})}{b_d^s(\Phi)}=\frac{1}{\tilde{H}(d)}$$

avec

$$\tilde{H}(d)=\frac{\sqrt{\tilde{J}(d-1)\tilde{J}(d+1)}}{\tilde{J}(d)}=\exp\left(-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta(2n+1)}{2n+1}2^{2n+1}\hbar^{2n+1}Q_n(d)\right)$$

et $Q_n(d)=(d+1)^{2n+1}+(d-1)^{2n+1}-2d^{2n+1}$.

Les formules obtenues nous disent en particulier que le logarithme de $b_d^s(\Phi_{KZ})/b_d^s(\Phi)$ admet pour développent limité

$$\frac{-2\mathrm{i}\zeta(3)d}{\pi^3}h^3+\frac{2\mathrm{i}d(2d^2+1)\zeta(5)}{\pi^5}h^5-\frac{2\mathrm{i}d(1+3d^4+5d^2)\zeta(7)}{\pi^7}+o(h^8)$$

4.5. Caractères. — Choisissons un modèle matriciel de $H_n(q)$ associé à une suite $(b_d)_{d\geq 2}=(b_d(\Phi))_{d\geq 2}$ pour un certain $\Phi\in\mathbb{A}\mathrm{ss}_\lambda(\Bbbk)$. Pour toute partition α de n, la représentation irréductible R associée sur les tableaux standard de forme α est GT-rigide et $R(\delta_2),\dots,R(\delta_n)$ engendre les matrices diagonales, comme on le déduit immédiatement de l'expression de δ_r pour $2\leq r\leq n$ et de l'invariance de σ_1 sous l'action de $GT_1(\Bbbk)$. En particulier, prenons pour R la représentation correspondant à la partition $[2,1^{n-1}]$ – c'est la représentation de Burau (réduite). On note $e_1,\dots,e_{n-1}$ sa base suivant l'ordre défini sur les tableaux standard, et $\chi_d=Q_{R,d}$ pour $2\leq d\leq n-1$. Pour tout $g\in GT_1(\Bbbk)$, on prend pour représentant de $Q_R(g)$ dans $GL_N(K)$ la matrice diagonale de coefficients $(1,\chi_2(g),\chi_2\chi_3(g),\dots)$. Notant par abus σ'_r (resp. σ_r) l'action de $\sigma_r\in B_n$ suivant $g.R$ (resp. R) on a, sur le plan (e_r,e_{r+1}),

$$\begin{pmatrix} * & b'_{r+1}\\ * & *\end{pmatrix}=\sigma'_{r+1}=\begin{pmatrix}\chi(g) & 0\\ 0 & \chi'(g)\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} * & b_{r+1}\\ * & *\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\chi(g) & 0\\ 0 & \chi'(g)\end{pmatrix}$$

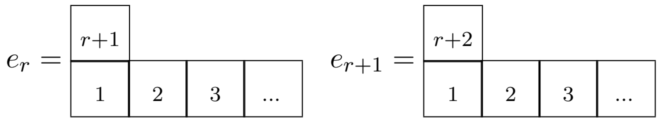

FIGURE 1. Base de la représentation de Burau

avec $\chi = \chi_2 \dots \chi_r$ et $\chi' = \chi_2 \dots \chi_{r+1}$, d'où $b'_{r+1} = b_{r+1}\chi_{r+1}(g)$. Comme la réduction $\overline{R}$ de R modulo h est absolument irréductible, les χ_r sont à valeurs dans $A^\times = \Bbbk[[h]]^\times$. Supposons maintenant $\Phi \in \mathbb{A}\mathrm{ss}_1(\Bbbk)$ et $b_d = b^s_d(\Phi)$. Si $\Phi' = g.\Phi$ on a alors $b^s_d(\Phi') = b^s_d(\Phi)\chi_d(g)$. En particulier, si $g \in GT_1(\mathbb{C})$ est tel que $\overline{\Phi}_{KZ} = g.\Phi_{KZ}$, $\chi_d(g)^{-1}$ est donné par la formule $(*)$. Comme, à $d \geq 2$ fixé, $Q_n(d) \sim 2n(2n+1)d^{2n-1}$ pour n grand, les fonctions de n définies sont linéairement indépendantes et on déduit immédiatement du lemme 4 :

PROPOSITION 4.2. — *Les caractères $\chi_d : GT_1(\mathbb{Q}) \to (\mathbb{Q}[[h]])^\times$ pour $d \geq 2$ sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$ en tant que fonctions $GT_1(\mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}[[h]]$.*

Pour conclure la démonstration du théorème C, soit α une partition quelconque de n, R la représentation de $H_n(q)$ correspondante suivant le modèle associé à $b^s_d(\Phi)$ et N sa dimension. Si T est un tableau standard de taille n, et $i < j$ avec $c_i(T) > c_j(T)$, on note $d_T(i,j) = l_j(T) - l_i(T) + c_i(T) - c_j(T) > 0$. Un représentant dans $GL_N(K)$ de $Q_R(g)$ pour $g \in GT_1(\Bbbk)$ est alors donné par la matrice diagonale qui à T de forme α associe $\chi_T(g)T$ avec

$$\chi_T(g) = \prod_{\substack{i<j \\ c_i(T)>c_j(T)}} \chi_{d_T(i,j)}(g).$$

En effet, il suffit de montrer que cette matrice conjugue les représentations associées à $b^s_d(\Phi)$ et $b^s_d(\Phi')$, c'est-à-dire les expressions de σ_r pour $1 \leq r \leq n-1$ suivant ces deux représentations. Fixant un tel r, il suffit de le montrer sur les plans (T_1, T_2) où T_2 est déduit de T_1 par l'échange de r et $r+1$. Or, si $T_1 < T_2$ et en notant d la distance axiale associée, on a $d = d_{T_2}(r, r+1)$ et $\chi_{T_2}(g) = \chi_{T_1}(g)\chi_d(g)$, donc $M^q_d(\Phi)$ est conjuguée par la matrice diagonale de coefficients $(1, \chi_d(g))$, ce qui donne bien $M^q_d(\Phi')$.

La relation entre les caractères issus de deux diagrammes symétriques l'un de l'autre est la suivante. Soit T un tableau de forme α, T' son symétrique de forme α'. Pour $d < 0$, notons par convention $\chi_d = 1$.

Alors

$$\chi_T \chi_{T'} = \prod_{\substack{i<j \\ c_i(T)>c_j(T)}} \chi_{d_T(i,j)} \prod_{\substack{i<j \\ l_i(T)>l_j(T)}} \chi_{d_T(j,i)}$$

est encore égal au produit des $\chi_{d_T(i,j)}\chi_{d_T(j,i)}$ sur tous les couples $i<j$ tels que $c_i(T)>c_j(T)$ ou (exclusif) $l_i(T)>l_j(T)$. De tels couples sont en bijection avec les crochets du diagramme α, c'est-à-dire les couples (x,y) de cases de α où x (resp. y) est en colonne c (resp. c') et ligne l (resp. l') avec $c<c'$ et $l>l'$: à (x,y) on associe le couple (i,j) où i (resp. j) est le minimum (resp. le maximum) de leurs contenus dans T ; inversement, la condition sur i et j signifie que les deux cases qui les contiennent forment un crochet. Pour un tel crochet (x,y) on définit sa longueur $\delta=\delta(x,y)=c'-c+l-l'$. Alors

$$\chi_{d_T(i,j)}\chi_{d_T(j,i)} = \chi_\delta \chi_{-\delta} = \chi_\delta$$

et

$$\chi_T \chi_{T'} = \prod_{\text{crochets } (x,y)} \chi_{\delta(x,y)}$$

dépend seulement de α, et plus de T.

4.6. Résonnances. — Remarquons que si une partition de n est donnée, les caractères χ_T pour R parcourant les tableaux standard de forme α ne sont pas nécessairement distincts, comme le montre l'exemple de $\alpha=[3,2]$: un représentant de $Q_R(g)$ dans $GL_5(K)$ est alors donné par la matrice diagonale de coefficients $(1,\chi_3(g),\chi_2\chi_3(g),\chi_2\chi_3(g),\chi_2^2\chi_3(g))$.

Proposition 4.3. — *La représentation de $H_n(q)$ associée à un diagramme α est sans résonnances si et seulement si α est une équerre ou égal à $[2,2]$.*

Démonstration. — Soit R la représentation de Burau (réduite), et $e_1,\dots,e_{n-1}$ la base choisie précédemment. Comme les diagrammes en équerres correspondent aux puissances extérieures de R, il faut montrer que $\Lambda^r R$ est sans résonnances pour $r\in[0,n-1]$. Fixons r et associons à toute partie $I=\{i_1,\dots,i_r\}\subset[1,n-1]$ de cardinal r avec $i_1<\dots<i_r$ le vecteur $e_I=e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_r}$. L'ensemble des vecteurs de ce type forme une base de $\Lambda^r R$. Un relèvement linéaire de Q_R est donné par l'action linéaire $g.e_i=\psi_i(g)e_i$, avec $\psi_1=1$, $\psi_2=\chi_2$, …, $\psi_{n-1}=\chi_2\dots\chi_{n-1}$.

$$T_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|}
\cline{1-1} n_1 \\
\cline{1-2} \vdots & n_2 \\
\cline{1-2} 6 & \vdots \\
\cline{1-3} 5 & 1+n_1 & n_3 \\
\cline{1-3} 2 & 4 & \vdots \\
\hline 1 & 3 & 1+n_2 & \ldots \\
\hline
\end{array}
\qquad
T_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|}
\cline{1-1} n_1 \\
\cline{1-2} \vdots & n_2 \\
\cline{1-2} 6 & \vdots \\
\cline{1-3} 4 & 1+n_1 & n_3 \\
\cline{1-3} 3 & 5 & \vdots \\
\hline 1 & 2 & 1+n_2 & \ldots \\
\hline
\end{array}$$

FIGURE 2. Tableaux tels que $\chi_{T_1} = \chi_{T_2}$

Un relèvement dans $GL(\Lambda^r R)$ de l'action projective de $GT_1(\Bbbk)$ sur $\Lambda^r R$ est donc donné par $g \mapsto Q(g)$ avec

$$Q(g)e_I = \left(\prod_{i\in I}\psi_i\right)(g)\, e_I = \left(\prod_{d=2}^{n-1}\chi_d^{f_d(I)}\right)(g)\, e_I$$

où $f_d(I) = \#\{i \in I \quad | \quad i \geq d\}$. Comme les χ_d sont algébriquement indépendants, il s'agit donc de montrer que, si $f_d(I) = f_d(J)$ pour $d \in [2, n-1]$, alors $I = J$, au moins si $\#I = \#J = r$. Mais dans ce cas, on a également $\#I = f_1(I) = f_1(J) = \#J$, d'où l'on déduit immédiatement $I = J$, puisque $i \in I \Leftrightarrow f_i(d) > f_{i-1}(d)$.

Le cas du diagramme $[2, 2]$ se ramène à celui de l'équerre $[2, 1]$, puisque ce deuxième est la restriction à $B_3 \subset B_4$ du premier.

D'après la relation entre χ_T et $\chi_{T'}$ pour deux tableaux T et T' symétriques l'un de l'autre, la représentation associée à α sera sans résonnances si et seulement si celle associée à α' l'est. Il reste donc à montrer que, si $\alpha \geq [3, 2]$, il existe deux tableaux distincts T_1 et T_2 de forme α tel que $\chi_{T_1} = \chi_{T_2}$. Considérons les deux tableaux de la figure 2 : on remplit d'abord les cases du sous-diagramme $[3, 2]$ comme indiqué avec les nombres de 1 à 5, puis l'on remplit les autres cases dans l'ordre standard avec les nombres restant. On a alors

$$\begin{aligned}
\chi_{T_1} &= (\chi_3 \cdots \chi_{n_1-1})(\chi_2 \cdots \chi_{n_1-3}) = \chi_2\chi_3^2 \cdots \chi_{n_1-3}^2\chi_{n_1-2} \\
&= (\chi_2 \cdots \chi_{n_1-2})(\chi_3 \cdots \chi_{n_1-3}) = \chi_{T_2}
\end{aligned}$$

$\square$

$w_3 = [x,y]$	$w_4 = [x,[x,y]]$	$w_5 = [y,[y,x]]$
$w_6 = [x,[x,[x,y]]]$	$w_7 = [y,[x,[x,y]]]$	$w_8 = [y,[y,[x,y]]]$
$w_9 = [x,[x,[x,[x,y]]]]$	$w_{10} = [y,[x,[x,[x,y]]]]$	$w_{11} = [y,[y,[x,[x,y]]]]$
$w_{12} = [y,[y,[y,[x,y]]]]$	$w_{13} = [[x,y],[x,[x,y]]]$	$w_{14} = [[x,y],[y,[x,y]]]$

TABLE 1. Bases de $\mathcal{L}(\mathbb{k})$ en degré au plus 5

5. Appendice : calculs en degré 5

Pour faire les calculs explicitement, on introduit des bases formées de monômes de Lie des composantes homogènes de $\mathcal{A}(\mathbb{k})$ jusqu'en degré 5. D'autre part, on note $a \equiv b$ si $\omega(a-b) \geq 6$. Notons ψ_1 et ψ_2 les éléments de $\mathfrak{grt}_1(\mathbb{k})$ correspondant aux éléments f_1 et f_2 de l'interprétation « hamiltonienne » de Drinfeld dans [3]. On exprime facilement $\psi_1 = w_5 - w_4$, et

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = -2w_{10} - 2w_{11} - 2w_{12} + 2w_{13} + w_{14}.$$

L'élément ψ_2 se déduit de $\partial f_2/\partial x$ par la transformation involutive $F(x,y) \mapsto F(x,-x-y)$, dont la matrice dans la base $w_9, \ldots, w_{14}$ des éléments de degré 5 s'écrit

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\psi_2 = -2w_9 - 4w_{10} - 4w_{11} - 2w_{12} - w_{13} - 3w_{14}.$$

On pose $\psi_{a,b} = a\psi_1 + b\psi_2 \in \mathfrak{grt}_1(\mathbb{k})$ pour $a, b \in \mathbb{k}$, et on note $\Psi_{a,b} \in GRT_1(\mathbb{k})$ son exponentielle au sens du groupe. Si $\Phi \in \mathbb{A}\mathrm{ss}_1(\mathbb{k})$, on sait que l'on peut écrire $\Phi \equiv 1 + \frac{1}{24}w_3 - \mathfrak{c}\psi_1 + \phi_4 + \phi_5$ avec ϕ_4, ϕ_5 homogènes de degrés respectifs 4 et 5. Alors

$$\Phi.\Psi_{a,b} = \exp(s_{\psi_{a,b}})(\Phi) \equiv \Phi + a\psi_1 + b\psi_2 + \frac{a}{24}(w_3\psi_1 + [[\psi_1, x], y]),$$

et de plus $[[\psi_1, x], y]] = -w_{11} - w_{10}$. D'autre part la formule de Le et Murakami [8] dit

$$\Phi_{KZ} \equiv 1 + \frac{w_3}{24} + \tilde{\zeta}(3)\psi_1 + \phi_4^{KZ} + \frac{1}{2}\tilde{\zeta}(5)\psi_2 - \frac{1}{24}\tilde{\zeta}(3)(w_{10} + w_{11} + w_3\psi_1)$$

avec $\tilde{\zeta}(n) = \zeta(n)/(2i\pi)^n$, et $\phi_4^{KZ} = (-w_7 - 4w_6 - 4w_8 + 5w_3^2)/5760$. On en déduit d'une part que

$$\Phi_0 = \Phi_{KZ}.\Psi_{-\tilde{\zeta}(3),-\tilde{\zeta}(5)/2} \equiv 1 + \frac{1}{24}w_3 + \phi_4^{KZ}$$

est pair jusqu'en degré 6, et d'autre part que tout associateur a les mêmes termes de degré 2 et 4.

Pour obtenir l'expression générale d'un élément de $GT_1(\Bbbk)$ jusqu'en degré 5, il suffit de calculer $g_{a,b} = \iota_{\Phi_0}(\Psi_{a,b})$, uniquement déterminé par $g_{a,b}.\Phi_0 = \Phi_0.\Psi_{a,b}$. Posons $g_{a,b} = \exp F$. A des termes d'ordre au moins 4 près, on a $\Phi_0 = 1 + w_3/24$, $\Phi_0 e^x \Phi_0^{-1} = e^x + [w_3, x]/24$, et $\log \Phi_0 e^x \Phi_0^{-1} = x - w_4/24$. Notons G_4, G_5 les composantes homogènes de degré 4 et 5 de $g_{a,b}$. On a vu que $g_{a,b} \equiv 1 + a\psi_1 + G_4 + G_5$, d'où $F \equiv a\psi_1 + G_4 + G_5$. Or $\psi_1 = w_5 - w_4$, et

$$\begin{cases} w_4(x - w_4/24, y) \equiv w_4 + (w_{10} + 2w_{13})/24 \\ w_5(x - w_4/24, y) \equiv w_5 - w_{11}/24 \end{cases}$$

d'où

$$F(\log \Phi_0 e^x \Phi_0^{-1}), y) \equiv a\psi_1 + G_4 + G_5 - \frac{a}{24}(w_{10} + w_{11} + 2w_{13}).$$

D'autre part $\Phi_0.\Psi_{a,b} \equiv \Phi_0 + a\psi_1 + b\psi_2 + a(w_3\psi_1 - w_{11} - w_{10})$ d'où

$$\begin{aligned} (\Phi_0.\Psi_{a,b}).\Phi_0^{-1} &= 1 + a\psi_1 + b\psi_2 + a([w_3, \psi_1] - w_{11} - w_{10})/24 \\ &= 1 + a\psi_1 + b\psi_2 - a(w_{10} + w_{11} + w_{13} + w_{14})/24 \end{aligned}$$

et son logarithme vaut

$$a\psi_1 + b\psi_2 - a(w_{10} + w_{11} + w_{13} + w_{14})/24 = F(\log \Phi_0 e^x \Phi_0^{-1}), y)$$

d'où $G_4 = 0$, et $G_5 = b\psi_2 + a(w_{13} - w_{14})/24$ soit

$$G_5 = -\Big(2bw_9 + 4bw_{10} + 4bw_{11} + 2bw_{12} + (b - \frac{a}{24})w_{13} + (b + \frac{a}{24})w_{14}\Big)$$

On peut d'autre part calculer

$$\chi_d(g_{a,b}) = \frac{b_d^s(\Phi_0.\Psi_{a,b})}{b_d^s(\Phi_0)} = 1 - 16adh^3 - 128db(1 + 2d^2)h^5 + \dots$$

Pour faire la comparaison avec les termes $\kappa_m^*(\sigma)$ d'Ihara, il faut calculer, pour chaque monôme de Lie w_r, les éléments $w'_r = \pi_{ab} \circ p_x(w_r(\log(1+x), \log(1+y)))$. On trouve

$$\begin{cases} w'_4 \equiv \frac{1}{2}y^2x^2 - \frac{1}{3}y^3x^2 - x^2y + x^3y - \frac{1}{2}y^2x^3 - \frac{11}{12}x^4y \\ w'_5 \equiv \frac{1}{3}y^2x^3 + y^2x - \frac{1}{2}y^2x^2 + \frac{1}{2}y^3x^2 - y^3x + \frac{11}{12}y^4x \end{cases}$$

et les images de $w_9, \dots, w_{14}$ sont respectivement $-x^4y, -y^2x^3, -y^3x^2, -y^4x, 0, 0$. On déduit alors de la formule générale de $g_{a,b}$ et de

$$\begin{aligned}\psi^\sigma_{ab} \equiv 1 + &\tfrac{\kappa_3^*(\sigma)}{2}(yx^2 + y^2x - yx^3 - y^2x^2 - y^3x)\\ &+(\tfrac{1}{24}\kappa_5^*(\sigma) + \tfrac{11}{24}\kappa_3^*(\sigma))(x^4y + y^4x)\\ &+(\tfrac{5}{12}\kappa_3^*(\sigma) + \tfrac{1}{12}\kappa_5^*(\sigma))(y^3x^2 + y^2x^3)\end{aligned}$$

que $a = \kappa_3^*(\sigma)/2$ et $b = \kappa_5^*(\sigma)/48$.

Si $l = 3$, $\kappa_3^*(\sigma) = \kappa_3(\sigma)/8$, $\kappa_5^*(\sigma) = \kappa_5(\sigma)/80$. On peut vérifier

$$\frac{1}{24}(\kappa_5^* + 11\kappa_3^*) = \frac{1}{8.80}\frac{1}{3}(\kappa_5 + 110\kappa_3) \in \mathbb{Z}_3$$

parce que modulo 3 $\kappa_5 + 110\kappa_3 \equiv 111\kappa_3 \equiv 0$,

$$\frac{1}{12}(5\kappa_3^* + \kappa_5^*) = \frac{1}{4.80}\frac{1}{3}(50\kappa_3 + \kappa_5) \in \mathbb{Z}_3$$

car $50\kappa_3 + \kappa_5 \equiv 51\kappa_3 \equiv 0$ modulo 3.

Si $l = 2$, on a $(\kappa_5^* + 11\kappa_3^*)/24 = (3\kappa_5 + 341\kappa_3)/(2^3.279) \in \mathbb{Z}_2$ car $3\kappa_5 + 341\kappa_3 \equiv 8\kappa_3 \equiv 0$ modulo 8. De même $(5\kappa_3^* + \kappa_5^*)/12 = (155\kappa_3 + 3\kappa_5)/(2^2.279) \in \mathbb{Z}_2$ parce que $155\kappa_3 + 3\kappa_5 \equiv 3(\kappa_3 + \kappa_5 \equiv 3.2\kappa_3 \equiv 0$ modulo 4. On a donc vérifié que les coefficients de $\psi^{ab}(\sigma)$ appartiennent à $\mathbb{Z}_l$. On déduit également de ces formules qu'au moins les premiers coefficients de $\chi_d(\sigma)$, $-16ad = -8d\kappa_3^*(\sigma)$ et $-128bd(1+2d^2) = -8\kappa_5^*(\sigma)d(1+2d^2)/3$ appartiennent à $\mathbb{Z}_l$, puisque $d(1 + 2d^2)$ est divisible par 3 pour tout $d \in \mathbb{N}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, Hermann 1968-1982.

[2] V. Chari et A. Pressley, *A guide to quantum groups*, Cambridge University Press, 1995.

[3] V.G. Drinfeld, *On quasitriangular quasi-Hopf algebras and a group closely connected with Gal($\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$)*, Leningr. Math. J. 2, No.4, 829-860 (1991).

[4] J. González-Lorca, *Série de Drinfeld, monodromie et algèbres de Hecke*, Thèse de l'université Paris XI-Orsay, 1998.

[5] H. Ichimura, K. Sakaguchi, *The non-vanishing of a certain Kummer character χ_m (after C. Soulé), and some related topics*, in Galois representations and arithmetic algebraic geometry, Proc. Symp.,

Kyoto 1985 and Tokyo 1986, Adv. Stud. Pure Math. 12, 53-64 (1987).

[6] Y. Ihara, *Braids, Galois Groups, and Some Arithmetic Functions*, Proc. I.C.M. Kyoto, 1990.

[7] M. Lazard, *Sur les groupes nilpotents et les anneaux de Lie*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér., III. Sér. 71, 101-190 (1954).

[8] T.Q.T. Le, J. Murakami, *The universal Vassiliev-Kontsevitch invariant for framed oriented links*, Compositio Math. **102** (1996) 41-64.

[9] I. Marin, *On KZ-systems which are irreducible under the action of the symmetric group*, C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I, Math. 333, No.6, 517-522 (2001).

[10] I. Marin, *Quotients infinitésimaux du groupe de tresses*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 53 No. 5, 1323-1364 (2003).

[11] I. Marin, *Irréductibilité générique des produits tensoriels de monodromies*, à paraître au Bull. Soc. Math. Fr.

[12] I. Marin, *On the representation theory of braid groups*, soumis pour publication.

[13] G. Racinet, *Séries génératrices non-commutatives de polyzêtas et associateurs de Drinfeld*, Thèse de l'université Paris XI-Orsay, 2000.

[14] C. Soulé, *On higher p-adic regulators*, Algebraic K-theory, Proc. Conf., Evanston 1980, Lect. Notes Math. 854, 372-401 (1981).

[15] C. Soulé, *Éléments cyclotomiques en K-théorie*, Journées arithmétiques de Besanon 1985, Astérisque 147- 148, 225-257 (1987).