4.2 Distributions tempérées

Définition 4.2

Une *distribution tempérée* est une forme linéaire sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ qui satisfait la propriété suivante : il existe $p \in \mathbb{N}$ et $c > 0$ tels que pour tout $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, $|\langle u, \phi \rangle| \leq c\mathcal{N}_p(\phi)$. On note $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ l'espace des distributions tempérées.

Remarque 4.2.1. 1. L'espace $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
2. Puisque $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, une distribution tempérée définit une forme linéaire sur $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, nous verrons dans la propriété suivante qu'une distribution tempérée est bien une distribution.
3. Une distribution tempérée u est continue : en effet $|\langle u, \phi - \psi \rangle| \leq c\mathcal{N}_p(\phi - \psi) \leq 2^p c d(\phi, \psi)$.

Propriété 4.2.1

$\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

Preuve. Soit $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ et c, p comme dans la définition. Soit $K \subset \mathbb{R}^d$ compact. Pour $\psi \in \mathscr{D}(K)$

$$\begin{aligned}|\langle u, \psi \rangle| &\leq c \sum_{\substack{|\alpha| \leq p \\ |\beta| \leq p}} ||X^\beta D^\alpha \psi||_\infty \\ &\leq c \max_{|\beta| \leq p} \max_{x \in K} |X^\beta(x)| \max_{|\alpha| \leq p} ||D^\alpha \psi||_\infty\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat en prenant l'entier p et le réel $\gamma := c \max_{|\beta| \leq p} \max_{x \in K} |X^\beta(x)|$. □

Définition 4.3

On note $L^1_M(\mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions localement intégrables f telles qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \mapsto \frac{f(x)}{(1+||x||)^n}$ est dans $L^1(\mathbb{R}^d)$

Exemple 4.2.1. Les polynômes et les fonctions bornées sont de telles fonctions.

Proposition 4.2.1

Soit $1 \leq p \leq \infty$ *et* $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. *Alors* $f \in L^1_M(\mathbb{R}^d)$.

Preuve. La fonction $x \mapsto \frac{1}{(1+||x||)^{(d+1)}}$ est dans $L^q(\mathbb{R}^d)$ pour tout $1 \leq q \leq \infty$. L'inégalité de Hölder permet alors de conclure. □

Proposition 4.2.2

Soit $f \in L^1_M(\mathbb{R}^d)$. *Alors* $T_f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Preuve. Soit n tel que $x \mapsto \frac{f(x)}{(1+||x||)^n}$ est intégrable. Soit $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.

$$\begin{aligned}|\langle T_f, \phi \rangle| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)\phi(x)| dx \\ &\leq \underbrace{\int_{B(0,1)} \frac{|f(x)|}{(1+||x||)^n}(1+||x||)^n |\phi(x)| dx}_{(1)} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,1)} (1+||x||^2)^n |\phi(x)| \frac{|f(x)|}{(1+||x||)^n} dx}_{(2)}\end{aligned}$$

avec

$$(1) \leq 2^n ||\phi||_\infty \int_{B(0,1)} \frac{|f(x)|}{(1+||x||)^n} dx$$

et

$$(2) \leq \max_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,1)} (1+||x||^2)^n |\phi(x)| \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,1)} \frac{|f(x)|}{(1+||x||)^n} dx$$

or

$$\begin{aligned}(1+||x||^2)^n|\phi(x)| &\leq |\phi(x)| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} ||x||^{2k} \\ &\leq 2^n \sum_{|\beta|\leq 2n} ||X^\beta \phi||_\infty \leq 2^n \mathcal{N}_{2n}(\phi).\end{aligned}$$

Comme $||\phi||_\infty \leq \mathcal{N}_{2n}(\phi)$, $|\langle T_f, \phi\rangle| \leq 2^n \mathcal{N}_{2n}(\phi) \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|f(x)|}{(1+||x||)^n} dx.$ □

Définition 4.4

On dit qu'une suite $(u_n)_n$ de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ converge vers u si pour toute $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, $\langle u_n, \phi\rangle$ converge vers $\langle u, \phi\rangle$. On dit qu'une application $h : \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ est séquentiellement continue si pour toute suite $(u_n)_n$ qui converge vers u, la suite $(h(u_n))_n$ converge vers $h(u)$.

Opérations élémentaires sur les distributions tempérées

On a déjà défini les opérations de conjugaison, symétrie et dérivation sur l'espace $\mathscr{D}'$. On peut vérifier que ces opérations envoient une distribution tempérée sur une distribution tempérée. Les vérifications des propositions suivantes sont laissées au lecteur.

Proposition 4.2.3

Pour $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$, $\bar{u} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ et l' application $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d) : u \mapsto \bar{u}$ est séquentiellement continue.

Proposition 4.2.4

Pour $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$, $\check{u} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ et l' application $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d) : u \mapsto \check{u}$ est séquentiellement continue.

Proposition 4.2.5

Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, et tout $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$, $\partial^\alpha u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ et l'application $\partial^\alpha : \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d) : u \mapsto \partial^\alpha u$ est séquentiellement continue.

Proposition 4.2.6

Pour $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ et $g \in \mathscr{C}^\infty_M(\mathbb{R}^d)$, la forme linéaire $gu : \phi \mapsto \langle u, g\phi\rangle$ est une distribution tempérée. De plus l'application $\mathfrak{p}_g : \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d) : u \mapsto gu$ est séquentiellement continue.

Preuve. Soit $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ et c, p tels que $|\langle u, \phi\rangle| \leq c\mathcal{N}_p(\phi)$ pour toute ϕ. On a vu dans la preuve du corollaire 4.1.3 et la remarque 4.1.4 qu'il existe $C_p(g) > 0$ et un entier $N_p(g)$ tels que $\mathcal{N}_p(fg) \leq C_p(g)\mathcal{N}_p(\phi)$, ce qui permet de conclure la première assertion. La seconde n'est qu'une simple vérification. □

Transformée de Fourier des distributions tempérées

Définition 4.5

Pour $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$, on note $\mathscr{F}(u)$ la forme linéaire sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ définie par $\phi \mapsto \langle u, \mathscr{F}(\phi\rangle$.

Proposition 4.2.7

Pour $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$, $\mathscr{F}(u) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ et l'application $\mathscr{F} : \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) : u \mapsto \mathscr{F}(u)$ est séquentiellement continue.

Preuve. Soit $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$, $c > 0$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que pour toute ϕ, $\langle u, \phi\rangle| \leq c\mathcal{N}_p(\phi)$. On a vu dans la preuve du théorème 4.3 et du lemme 4.1 qu'il existe $\gamma > 0$ tel que $\mathcal{N}_p(\mathscr{F}(f)) \leq \gamma\mathcal{N}_{p+d+1}(f)$, donc

$$|\langle \mathscr{F}(u), \phi\rangle| \leq \gamma C_p \mathcal{N}_{p+d+1}(\phi)$$

et $\mathscr{F}(u) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$. La continuité séquentielle est une simple vérification. □

Propriété 4.2.2

Soit $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$.

1. $\mathscr{F}(\partial^\alpha u) = (2i\pi)^{|\alpha|} X^\alpha \mathscr{F}(u)$.
2. $\mathscr{F}(X^\alpha u) = (-2i\pi)^{|\alpha|} \partial^\alpha \mathscr{F}(u)$.

Preuve. Soit $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.

$$\begin{aligned}
\langle \mathscr{F}(\partial^\alpha u), \phi\rangle = \langle \partial^\alpha u, \mathscr{F}(\phi)\rangle &= (-1)^{|\alpha|}\langle u, \partial^\alpha \mathscr{F}(\phi)\rangle \\
&= (-1)^{|\alpha|}(-2i\pi)^{|\alpha|}\langle u, \mathscr{F}(X^\alpha \phi)\rangle \\
&= (2i\pi)^{|\alpha|}\langle \mathscr{F}(u), X^\alpha \phi\rangle \\
&= (2i\pi)^{|\alpha|}\langle X^\alpha \mathscr{F}(u), \phi\rangle
\end{aligned}$$

ce qui donne la première assertion.

$$\begin{aligned}
\langle \mathscr{F}(X^\alpha u), \phi\rangle = \langle X^\alpha u, \mathscr{F}(\phi)\rangle &= \langle u, \partial^\alpha X^\alpha \mathscr{F}(\phi)\rangle \\
&= (-2i\pi)^{-|\alpha|}\langle u, \mathscr{F}(D^\alpha \phi)\rangle \\
&= (2i\pi)^{-|\alpha|}\langle \mathscr{F}(u), D^\alpha \phi\rangle \\
&= (-2i\pi)^{-|\alpha|}\langle \partial^\alpha \mathscr{F}(u), \phi\rangle
\end{aligned}$$

ce qui donne la seconde. □

Proposition 4.2.8

Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\mathscr{F}(T_f) = T_{\mathscr{F}(f)}$.

Preuve. Soit $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{F}(T_f), \phi\rangle &= \langle T_f, \mathscr{F}(\phi)\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mathscr{F}(\phi)(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\big(\int_{\mathbb{R}^d} \phi(\xi)e^{-2i\pi\langle x,\xi\rangle}d\xi\big)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \phi(\xi)\big(\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2i\pi\langle x,\xi\rangle}dx\big)d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \phi(\xi\hat{f}(\xi)d\xi = \langle T_{\hat{f}}, \phi\rangle
\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat. □

Proposition 4.2.9

Pour $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $\mathscr{F}(T_f) = T_{\mathscr{P}(f)}$.

Preuve. Soit $g \in L^2$ et $(g_n)_n$ une suite de $L^1 \cap L^2$ qui converge vers f dans L^2 et soit $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Alors

$$|\langle T_g - T_{g_n}, \phi\rangle| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |g - g_n||\phi|d\lambda \leq ||g - g_n||_2||\phi||_2 \to_{n\to\infty} 0$$

et la suite $(T_{g_n})_n$ converge vers T_g dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$. Alors

$$\langle \mathscr{F}(T_f), \phi\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \mathscr{F}(T_{f_n}), \phi\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle T_{\hat{f}_n}, \phi\rangle = \langle T_{\mathscr{P}(f)}, \phi\rangle,$$

la dernière égalité venant de ce que la suite $(\hat{f}_n)_n$ converge vers $\mathscr{P}(f)$ dans L^2. □

Théorème 4.4

L'application $\mathscr{F} : \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ est un isomorphisme d'inverse $u \mapsto \mathscr{F}(\check{u})$.

Preuve. Soit $u \in Sj'(\mathbb{R}^d)$ et $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.

$$\begin{aligned}
\langle \mathscr{F}(\mathscr{F}(\check{u}), \phi\rangle &= \langle \mathscr{F}(\check{u}), \mathscr{F}(\phi)\rangle \\
&= \langle \check{u}, \mathscr{F}^2(\phi)\rangle \\
&= \langle \check{u}, \check{\phi}\rangle \\
&= \langle u, \check{\check{\phi}}\rangle = \langle u, \phi\rangle
\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat. □