Université de Picardie Jules Verne 2020-2021
Préparation à l'Agrégation interne de mathématiques

Sous-groupes distingués et groupes quotients

1 Quelques rappels sur les relations d'équivalence

Dans cette section E est un ensemble.

Définition 1.1. Une *relation binaire* sur E est une partie $\Gamma \subset E \times E$. On dit que deux éléments x et y de E satisfont la relation binaire si $(x, y) \in \Gamma$. On note souvent $x\mathcal{R}y$.

Exemple 1.1. • $E = \mathbb{Z}$ et $\Gamma = \{n, n+1) \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$.
• $E = \mathbb{R}$ et $\Gamma = \{(t^2, t) \,|\, t \in \mathbb{R}\}$.
• $E = \mathbb{R}$ et $\Gamma = \{(x, y) \,|\, |x| < |y|\}$.

Définition 1.2. Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est une *relation d'équivalence* si elles satisfait les trois propriétés suivantes

(i) **réflexivité** pour tout $x \in E$, $x\mathcal{R}x$

(ii) **symétrie** pour tous $x, y \in E$, si $x\mathcal{R}y$ alors $y\mathcal{R}x$

(iii) **transitivité** pour tous $x, y, z \in E$, si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ alors $x\mathcal{R}z$

Pour $x \in E$, on appelle *classe d'équivalence de* x l'ensemble noté $\bar{x} := \{y \in E \,|\, x\mathcal{R}y\}$

Remarque 1.1. Si $x, y \in E$, ou bien $\bar{x} = \bar{y}$ ou bien $\bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$. Les classes d'équivalence forment donc une **partition** de E. Réciproquement si $(A_i)_i \in I$ est une partition de E (c'est-à-dire si $E = \bigcup_{i \in I} A_i$ et $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$), alors on peut définir une relation d'équivalence sur E par $x\mathcal{R}y$ si x et y sont dans la même partie A_i. Ceci revient à choisir $\Gamma := \bigcup_{i \in I} A_i \times A_i$.

Définition 1.3. Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation déquivalence sur E. L'*ensemble quotient de* E *par* $\mathcal{R}$ est l'ensemble des classes déquivalence de E, on le note ${}^{E}\!/_{\mathcal{R}}$.

Remarque 1.2. L'ensemble quotient est donc une partie de $\mathcal{P}(E)$.

Définition 1.4. Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. L'application $\pi : E \to {}^{E}\!/_{\mathcal{R}} : x \mapsto \bar{x}$ est la *projection canonique de* E *sur* ${}^{E}\!/_{\mathcal{R}}$.

Remarque 1.3. $\pi(x) = \pi(y)$ si et seulement si $x\mathcal{R}y$.

Théorème 1.1. *Soit* E, F *deux ensembles,* $f : E \to F$ *une application et* $\mathcal{R}$ *une relation d'équivalence sur* E*. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) il existe $\bar{f} : {}^{E}\!/_{\mathcal{R}} \to F$ *telle que* $\bar{f} \circ \pi = f$

(ii) pour tous $x, y \in E$*, si* $\pi(x) = \pi(y)$ *alors* $f(x) = f(y)$*.*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & F \\ {}^{E}\!/_{\mathcal{R}} \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Si ces hypothèses sont réalisées, l'application $\bar{f}$ *est unique. On dit alors que l'application* f passe au quotient*.*

Preuve. Supposons *(i)*. Alors si $\pi(x) = \pi(y)$, $\bar{f} \circ \pi(x) = \bar{f} \circ \pi(y)$ et donc $f(x) = f(y)$.

Réciproquement, supposons *(ii)*. Posons $\bar{f} : \bar{x} \mapsto f(x)$ où $x \in \bar{x}$. L'application $\bar{f}$ est bien définie et satisfait *(i)*. □

Remarque 1.4. Sous les hypothèses du théorème précédent, $\bar{f}$ est surjective si et seulement si f est surjective et $\bar{f}$ est injective si et seulement si $f(x) = f(x') \Rightarrow \pi(x) = \pi(x')$.

2 Classes à gauche ou à droite

Soit G un groupe et H un sous-groupe de G.

Lemme 2.1. *La relation sur G $g\mathcal{R}_H g'$ si $g^{-1}g' \in H$ est une relation d'équivalence sur H.*

Définition 2.1. On appelle *classe à gauche de gmodulo H* la classe d'équivalence de g pour la relation $\mathcal{R}_H$.

Remarque 2.1. La terminologie classe à gauche se justifie par le fait que $\bar{g} = \{gh \mid h \in H\} = gH$.

Remarque 2.2. En considérant la relation d'équivalence $g_H\mathcal{R}g'$ si $g'g^{-1} \in H$, on définit de même les *classes à droite modulo H* en remarquant que $\bar{g} = \{hg \mid h \in H\} = Hg$.

Exercice 1. Montrer que les ensembles ${}^{G}/_{\mathcal{R}_H}$ et ${}^{G}/_{_H\mathcal{R}}$ sont en bijection.

Définition 2.2. Si l'ensemble ${}^{G}/_{\mathcal{R}_H}$ est fini, son cardinal est appelé *indice de H dans G*, on le note $[G : H]$.

Théorème 2.1 (Théorème de Lagrange)**.** *Si G est fini, alors ${}^{G}/_{\mathcal{R}_H}$ est fini et*

$$|G| = |H| \cdot [G : H]$$

Preuve. Pour tout g, $|gH| = |H|$ car $h \mapsto gh$ est bijective de réciproque $h \mapsto g^{-1}h$. On a vu que les classes d'équivalence forment une partition de G et par définition, leur nombre est $[G : H]$. □

Corollaire 2.1. *L'ordre d'un sous-groupe divise l'ordre du groupe.*

3 Sous-groupes distingués

Pour $g \in G$, l'application $G \to G : h \mapsto ghg^{-1}$ est un automorphisme de réciproque $h \mapsto g^{-1}hg$. Un tel automorphisme est appelé *automorphisme intérieur*. Pour $h \in G$, on appelle *conjugué* de g tout élément de la forme $g^{-1}hg$.

Définition 3.1. Un sous-groupe H de G est dit *distingué* ou *normal* s'il est stable par tout automorphisme intérieur c'est-à-dire si pour tout $g \in G$, $gHg^{-1} \subset H$. On note alors $H \lhd G$.

Remarque 3.1. Si G est abélien tous les sous-groupes sont distingués ; cette notion n'a d'intérêt que pour les groupes non abéliens.

Propriétés 3.1. *Les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) $H \lhd G$

(ii) pour tout $g \in G$, $gH = Hg$

Remarque 3.2. Les sous-groupe distingués sont donc les sous-groupes pour lesquels classes à gauche et classe à droite coïncident.

Exercice 2. Montrer que $SL_n(R) \lhd \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 3. Soit $f : G \to G'$ un homomorphisme de groupes. Montrer que le noyau de f est un sous-groupe distingué de G.

Exercice 4.

1. Soit H un sous-groupe d'un groupe G. Montrer que l'intersection des conjugués de H est un sous-groupe distingué dans G.
2. Soit G un groupe qui ne contient qu'un seul sous-groupe H d'ordre n. Montrer que H est distingué dans G.

Exercice 5. Soit G un groupe et H, K deux sous-groupes de G tels que $K \subset H$. Parmi les affirmations suivantes, dites lesquelles sont vraies :

1. Si K est distingué dans G, alors K est distingué dans H.
2. Si K est distingué dans H, alors K est distingué dans G.
3. Si K est distingué dans H et si H est distingué dans G, alors K est distingué dans G.

Exercice 6. Montrer que si H est un sous-groupe d'indice 2 dans un groupe G, alors H est distingué dans G.

Exercice 7. Soit G, G' deux groupes et $f : G \to G'$ un morphisme.

1. Montrer que si $K \lhd G'$, $f^{-1}(K) \lhd G$.
2. Montrer que si f est surjective et si $H \lhd G$, $f(H) \lhd G'$.

Exercice 8. Soit H un sous-groupe de G, on appelle *normalisateur* de H dans G l'ensemble des éléments x de G, tels que $xHx^{-1} = H$, on le note $N_G(H)$.

1. Montrer que $N_G(H)$ est un sous-groupe de G et que H est distingué dans $N_G(H)$.
2. Soit K un sous groupe de G contenant H et tel que H soit distingué dans K. Montrer que K est un sous-groupe de $N_G(H)$. En déduire que $N_G(H)$ est le plus grand sous-groupe de G dans lequel H est distingué.
3. Soit K un sous-groupe de $N_G(H)$ montrer que HK est un groupe et que H est distingué dans HK.
4. Soient H et K deux sous-groupes de G. Montrer que HK est un groupe si et seulement si $HK = KH$.

4 Groupes quotient

Définition 4.1. Soit G un groupe. On dit qu'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie sur G est compatible avec la loi de groupe si quels que soient g, g', γ et γ' dans G :

$$(g\mathcal{R}g' \text{ et } \gamma\mathcal{R}\gamma') \Rightarrow (g\gamma)\mathcal{R}(g'\gamma')$$

Exercice 9. Montrer que $\mathcal{R}$ est compatible avec la loi de groupe si et seulement si l'application ${}^{G}/_{\mathcal{R}} \times {}^{G}/_{\mathcal{R}} \to {}^{G}/_{\mathcal{R}}$ suivante est bien définie

$$\bar{g}\bar{g'} := \overline{gg'} \quad \text{pour} \quad g \in \bar{g} \text{ et } g' \in \bar{g}'$$

Nous allons maintenant voir que la LCI définie ci-dessus est une loi de groupe si et seulement si $\mathcal{R}$ est une relation modulo un sous-groupe distingué H de G.

Théorème 4.1. *Soit G un groupe et $\mathcal{R}$ une relation déquivalence sur G et soit $\pi : G \to {}^{G}/_{\mathcal{R}}$. Soit H la classe déquivalence du neutre e de G. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathcal{R}$ compatible avec la loi de groupe

(ii) la LCI définie sur ${}^{G}/_{\mathcal{R}}$ par passage au quotient est une loi de groupe de neutre H et telle que π est un morphisme de groupe.

(iii) H est sous-groupe distingué de G et $\mathcal{R} = \mathcal{R}_H$.

Exercice 10. Prouver le théorème.

Définition 4.2. Si H est un sous-groupe distingué de G, on note ${}^{G}/_{H}$ le quotient ${}^{G}/_{\mathcal{R}_H}$ muni de sa structure de groupe.

Théorème 4.2. *Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupes. Alors $\ker f$ est un sous-groupe distingué de G et $\bar{f} : {}^{G}/_{\ker f} \to \operatorname{Im} f$ est un isomorphisme de groupes.*

Exercice 11. Prouver le théorème.

Remarque 4.1. Tout sous-groupe distingué de G peut être vu comme le noyaux d'un morphismes issu de G.

Exercice 12. Soient f un automorphisme d'un groupe G et H un sous-groupe distingué de G.

1. Montrer que $f(H)$ est un sous-groupe distingué de G.
2. Montrer que les groupes ${}^{G}/_{H}$ et ${}^{G}/_{f(H)}$ sont isomorphes.

Exercice 13. Soit G un groupe, H et K deux sous-groupes de G.

1. On suppose que H est contenu dans le distinguéisateur de K.
   (a) Montrer que $H \cap K$ est un sous-groupe distingué de H.
   (b) Montrer que ${}^{H}/_{H \cap K}$ est isomorphe à ${}^{HK}/_{K}$.
2. On suppose que H et K sont normaux et que K est contenu dans H.
   (a) Montrer que K est distingué dans H.
   (b) Montrer que ${}^{{}^{G}/_{K}}/_{{}^{H}/_{K}}$ est isomorphe à ${}^{G}/_{H}$.

Exercice 14. Montrer les isomorphismes suivants :

1. ${}^{\mathbb{R}}/_{\mathbb{Z}} \sim \mathbb{U}$
2. ${}^{\mathbb{C}^*}/_{\mathbb{R}^*} \sim \mathbb{U}$
3. ${}^{\mathbb{C}^*}/_{\mathbb{U}} \sim \mathbb{R}_+^*$
4. ${}^{\mathbb{R}^*}/_{\mathbb{R}_+^*} \sim {}^{\mathbb{Q}^*}/_{\mathbb{Q}_+^*} \sim \{-1, 1\}$
5. ${}^{\mathbb{C}^*}/_{\mathbb{R}^*} \sim \mathbb{U}/\{-1, 1\}$.

Exercice 15. Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $b \in \mathbb{R}$, on définit :

$$T_{a,b} \ : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax + b \end{array}$$

1. Montrer que $\mathcal{A} = \{T_{a,b} \mid a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ ,\ b \in \mathbb{R}\}$ est un groupe pour la composition des applications. Est-ce un groupe abélien ?
2. Montrer que le sous-groupe des translations : $\mathcal{T} = \{T_{1,b} \mid b \in \mathbb{R}\}$ est un sous groupe distingué de $\mathcal{A}$.
3. Décrire ${}^{\mathcal{A}}/_{\mathcal{T}}$.

Exercice 16. Soit G un groupe. On note $Z(G) := \{\gamma \in G \,|\, \gamma g = g\gamma \ \forall g \in G\}$ le centralisateur de G.

1. Montrer que $Z(G)$ est distingué dans G.
2. Montrer que si ${}^{G}/_{Z(G)}$ est monogène alors G est abélien.

Exercice 17. Soient G un groupe et H un sous-groupe distingué de G. Montrer que l'application $K \mapsto {}^{K}/_{H}$ est une bijection de l'ensemble des sous-groupes de G qui contiennent H sur l'ensemble des sous-groupes de ${}^{G}/_{H}$. Retrouver ainsi les sous-groupes de ${}^{\mathbb{Z}}/_{n\mathbb{Z}}$.

Exercice 18. Soit G un groupe. On note $\mathrm{Aut}(G)$ le groupe des automorphismes de G. Pour $a \in G$, on note f_a l'application $G \to G$ définie par $f_a(x) = axa^{-1}$.

1. Montrer que l'application $G \to \mathrm{Aut}(G) : a \mapsto f_a$ est un morphisme de G sur $Aut(G)$.
2. Montrer que $\mathrm{Int}(G) := \{f_a \,|\, a \in G\}$ est un sous-groupe distingué de $\mathrm{Aut}(G)$.
3. Montrer que $\mathrm{Int}(G)$ est isomorphe à ${}^{G}/_{Z(G)}$.

Exercice 19. Soient $T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} ;\ a, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b \in \mathbb{R} \right\}$ et $U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ;\ b \in \mathbb{R} \right\}$. Montrer que U est un sous-groupe distingué de T et que ${}^{T}/_{U}$ est abélien.